



Introduction à la géométrie adique et perfectoïde

Mémoire de Master 2 en Mathématiques Fondamentales

ADRIEN CORTES

Sous la direction de DANIEL CARO *

Année universitaire 2022-2023



UNIVERSITÉ
CAEN
NORMANDIE

*. Professeur à l'Université de Caen Normandie.

Table des matières

Introduction	4
1 Géométrie sur les espaces adiques	7
1.1 Valuations	8
1.1.1 Premières définitions et propriétés	8
1.1.2 Valuations sur un corps	11
1.1.3 Spectre valuatif	13
1.2 Anneaux et paires de Huber	17
1.2.1 Généralités	17
1.2.2 Anneaux de Huber	20
1.2.3 Valuations continues	22
1.2.4 Morphismes adiques	23
1.2.5 Anneaux de Tate	24
1.2.6 Quotient	26
1.2.7 Complétion	27
1.2.8 Produit tensoriel	28
1.2.9 Polynômes et séries convergentes	29
1.2.10 Localisation	34
1.3 Spectres adiques	37
1.3.1 Espace topologique du spectre adique	37
1.3.2 Localisation selon un ouvert rationnel	40
1.3.3 Préfaisceaux sur le spectre adique	41
1.3.4 Fibres	43
1.3.5 Théorème d'acyclicité de Tate	46
1.4 Espaces adiques	51
1.4.1 Définitions et premières propriétés	51
1.4.2 Espaces adiques analytiques	52
1.4.3 Corps résiduel complété et corps affinoïdes	56
1.4.4 Exemples	57
2 Géométrie perfectoïde	62
2.1 Anneaux perfectoïdes	63
2.2 Basculement d'anneaux perfectoïdes	69
2.2.1 Basculé	69
2.2.2 Débasculement	73
2.2.3 Début de géométrisation du basculement	81

2.3	Presque mathématiques	82
2.3.1	Catégorie des presque modules	82
2.3.2	Localisations rationnelles d'un anneau perfectoïde et basculement	84
2.4	Espaces perfectoïdes	86
A	Notions complémentaires	92
A.1	Topologie	92
A.2	Groupes et anneaux topologiques	92
A.3	Complétion	94
A.4	Vecteurs de Witt	97
A.5	Cohomologie de Čech	100
A.6	Localisation selon une sous-catégorie de Serre	102
	Bibliographie	104

Introduction

En théorie des schémas [14], on associe à tout anneau commutatif un espace topologique, son *spectre premier*, dont les points sont les idéaux premiers de l'anneau. Cet espace porte de plus un *faisceau d'anneaux*, qui correspond aux fonctions sur cet espace et permet de reconstruire l'anneau de départ. On obtient ainsi une dualité très riche entre algèbre et géométrie, qui de nos jours sert de langue commune à l'étude de la géométrie algébrique.

À partir de 1993, R. Huber a étendu ce point de vue dans la série de papiers [16] [17] en associant à certains *anneaux topologiques non-archimédiens* des espaces appelés *spectres adiques*. Les points sont cette fois des classes d'équivalences de *valuations* sur les anneaux considérés, tandis que l'espace ambiant est muni d'un *faisceau d'anneaux topologiques*, permettant à nouveau de retrouver l'anneau originel. Il définit alors les *espaces adiques* comme recollements de spectres adiques. La théorie des schémas s'exprime naturellement dans ce contexte, en considérant tout anneau commutatif comme muni de la topologie discrète.

Huber fait également remarquer que la catégorie des espaces adiques contient naturellement les catégories des schémas formels (avec des conditions de finitude) [14] et des espaces rigides analytiques définis par J. Tate [32]. Il a ensuite écrit un livre [18] sur la cohomologie étale des espaces adiques (avec des hypothèses noethériennes) où il montre notamment que ces derniers permettent de retrouver la cohomologie étale des espaces rigides de Tate.

Les espaces adiques paraissent donc être de bons candidats pour développer une géométrie analytique non-archimédienne, par analogie avec la géométrie analytique complexe. Il semble néanmoins qu'ils furent peu utilisés, du moins jusqu'à l'introduction inattendue des *espaces perfectoides* par P. Scholze dans sa thèse [28] en 2012, motivé par des questions portant sur la cohomologie l -adique de variétés projectives lisses sur un corps p -adique. Scholze définit en effet une certaine classe d'espaces adiques, construits comme recollements de spectres adiques *d'anneaux perfectoides*. Ces derniers sont des anneaux topologiques où le nombre premier p est très ramifié et où tout élément est bien approximé par une racine p -ième d'un autre élément, ce qui revient à demander à ce que l'anneau soit *parfait* s'il est de caractéristique p .

Il montre également que tout anneau perfectoïde peut se *basculer*, procédé produisant naturellement un anneau perfectoïde de caractéristique p . Le foncteur de basculement induit une équivalence de catégories entre les algèbres perfectoides sur un anneau perfectoïde A et celles sur son basculé A^\flat , d'une façon compatible avec les morphismes étales. Cela permet de ramener l'étude de la cohomologie étale d'objets perfectoides de caractéristique 0 à celle d'objets perfectoides de caractéristique p . On peut donc découper les problèmes en deux parties : réussir à redescendre une solution à un problème après changement de base par un anneau perfectoïde, et résoudre le problème en caractéristique p , où la situation est facilitée par la présence de l'automorphisme de Frobenius. Scholze démontre de cette façon de nouveaux cas de la conjecture de monodromie-poids, en les réduisant à des cas déjà traités par P. Deligne en caractéristique p et en utilisant les résultats de comparaison de Huber.

Scholze a ensuite donné une série de cours en 2014 à l'université de Berkeley, où il a présenté le formalisme des *diamants*, qui sont des recollements d'espaces perfectoïdes selon des relations d'équivalences *pro-étales*, dans l'optique d'adapter en caractéristique mixte des constructions utilisées dans des travaux de V. Drinfeld, L. Lafforgue et V. Lafforgue sur la correspondance de Langlands pour les corps de fonctions. À ce titre, il a exposé de manière très claire et concise la théorie des espaces adiques et perfectoïdes. Les notes de ces cours ont ensuite été rédigées avec J. Weinstein, donnant lieu à la publication du livre [30].

L'objectif de ce mémoire était donc de s'appropriier le contenu de [30, Lectures 2-7], en regardant des exemples et en apprivoisant le formalisme général, ce dernier devenant de plus en plus utilisé en géométrie analytique non-archimédienne. L'organisation de ce document reflète de fait ma compréhension chronologique et ma connaissance partielle de ces vastes sujets.

Outre les papiers fondateurs de Huber et Scholze, une importante littérature commence maintenant à exister sur ces sujets. J'ai particulièrement consulté les notes de cours de S. Morel [23] et de M. Morrow [24], le livre récent de L. Ramero [27] et les chapitres écrits par Weinstein [34] et K. S. Kedlaya [19] dans le livre [1] issu de la Arizona Winter School 2017, consacrée aux espaces perfectoïdes. J'en profite pour faire référence aux notes de cours très récentes (et en cours d'écriture) de L. Fargues [9], pour une exposition prenant en compte les derniers développements.

This work is licensed under a Creative Commons "Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International" license.



Remerciements. Je remercie chaleureusement Daniel Caro pour l'encadrement de ce stage ; pour la liberté qu'il m'a accordé dans mon exploration du sujet, pour sa lecture attentive, sa patience et ses remarques toujours pertinentes.

Je remercie également les personnes qui ont contribué à ce mémoire par des discussions enrichissantes sur le fond ou sur la forme ; je tiens à citer Marguerite, Joseph, Mattias, Lucas, Blandine, Quentin, Abel et Antoine.

Je remercie aussi les doctorant-es du LMNO (ou apparenté-es), notamment Dorian et Rubén, pour leur accueil très amical. Je remercie enfin les responsables et personnels administratifs du Master de Mathématiques Fondamentales à Sorbonne Université, ainsi que du LMNO, pour leur réactivité et leur efficacité.

Conventions. On notera $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ l'ensemble des entiers positifs. On fixera dans l'ensemble de ce document un nombre premier p . On notera aussi \mathbb{Z}_p l'anneau des entiers p -adiques, \mathbb{Q}_p le corps des nombres p -adiques et $\mathbb{F}_p((T))$ le corps des séries de Laurent en la variable T à coefficients dans le corps fini \mathbb{F}_p à p éléments.

Tous les anneaux seront commutatifs et unitaires, les morphismes d'anneaux enverront 1 vers 1 et $\text{Spec}(A)$ désignera le spectre premier d'un anneau A muni de sa topologie de Zariski. Si \mathfrak{p} est un idéal premier d'un anneau A , on notera $\kappa(\mathfrak{p}) := \text{Frac}(A/\mathfrak{p})$ le corps des fractions de l'anneau intègre A/\mathfrak{p} . Si A et B sont des anneaux topologiques, tout morphisme d'anneaux $A \rightarrow B$ sera (sauf mention contraire) supposé continu.

On notera \subseteq l'inclusion d'ensembles au sens large. Soient I une petite catégorie, \mathcal{C} une catégorie et $F : I \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur. On appellera *limite* du diagramme défini par F un objet Δ de \mathcal{C} avec une transformation naturelle $\delta : \Delta_I \Rightarrow F$ du foncteur $\Delta_I : I \rightarrow \mathcal{C}$ constant égal à Δ vers F , de sorte que si $\Delta' \in \mathcal{C}$ vient avec une transformation naturelle $\delta' : \Delta'_I \Rightarrow F$ alors cette dernière se factorise de façon unique par δ . La limite de F , lorsqu'elle existera, sera notée $\varprojlim_{i \in I} F(i)$ ou simplement $\varprojlim_I F(i)$. On définit de façon analogue la *colimite* (Δ, δ) de F , notée $\varinjlim_{i \in I} F(i)$ ou $\varinjlim_I F(i)$, la transformation naturelle étant cette fois de la forme $\delta : F \Rightarrow \Delta_I$.

On utilisera librement l'axiome du choix et ses conséquences (tout anneau non nul a un idéal maximal, un produit quelconque d'espaces topologiques compacts est compact, ...).

Chapitre 1

Géométrie sur les espaces adiques

Nous commencerons ce chapitre par des généralités sur les valuations de rangs quelconques sur un anneau. Nous expliquerons le lien indissociable qu'elles auront avec les anneaux de valuations des corps. Cela nous permettra de définir le *spectre valuatif* d'un anneau : ce sera un espace topologique constitué de l'ensemble des valuations envisageables (à équivalence près) sur l'anneau et dont la formation sera fonctorielle en celui-ci.

Nous étudierons ensuite les anneaux et paires de Huber ainsi que leurs propriétés. Les *anneaux de Huber* seront une bonne classe d'anneaux topologiques non-archimédiens, définis comme étant des anneaux topologiques admettant un sous-anneau ouvert muni d'une topologie I -adique, pour un idéal I de type fini de ce sous-anneau. Ils seront adaptés aux questions de géométrie algébrique non-archimédienne car ils fourniront un cadre englobant les anneaux commutatifs (avec la topologie discrète), les anneaux portant une topologie I -adique, briques de base des schémas formels, les algèbres topologiquement de type finies sur un corps non-archimédien, rencontrées en géométrie rigide analytique, et les anneaux perfectoides qui permettront de construire les espaces perfectoides. Par nécessité de souplesse, nous considérerons plutôt des *paires de Huber* (A, A^+) , formées d'un anneau de Huber A et d'un sous-anneau A^+ ouvert et intégralement clos dans A , dont les éléments seront à *puissances bornées*. De tels sous-anneaux permettront de traiter les phénomènes au niveau *entier*.

Après des généralités, nous introduirons les morphismes adiques, définirons les anneaux de Tate (dont les anneaux perfectoides seront des cas particuliers) et étudierons certaines constructions envisageables : quotient, complétion, anneaux de polynômes, séries convergentes et localisation. Nous définirons enfin la notion de *valuation continue* sur un anneau de Huber et dirons quelques mots sur les corps non-archimédiens et leurs séries convergentes.

Le pendant géométrique sera l'objet de la section 1.3. À toute paire de Huber (A, A^+) sera associée son *spectre adique* $\mathrm{Spa}(A, A^+)$. Ce sera un *espace spectral* c'est-à-dire homéomorphe à l'espace topologique du spectre premier d'un anneau, ou de façon équivalente, un espace quasi-compact avec une base d'ouverts quasi-compacts stable par intersections finies et tel que tout fermé irréductible possède un unique point générique. Le spectre adique de (A, A^+) sera défini comme l'ensemble des (classes d'équivalences de) valuations de A qui seront majorées par 1 sur A^+ . Nous le doterons d'un couple de préfaisceaux d'anneaux topologiques complets et d'une valuation sur la fibre de chaque point. Ces préfaisceaux de fonctions auront le bon goût d'être des faisceaux dans les cas nous intéressant. Nous étudierons alors la structure d'anneau local et la valuation induite sur la fibre de chaque point. Nous donnerons également des éléments de démonstration du *théorème d'acyclicité de Tate* dans le cas des anneaux de

Tate *stablement uniformes*, condition vérifiée par les anneaux perfectoides. Ce théorème nous permettra de montrer dans le chapitre 2 que le préfaisceau du spectre adique d'un anneau perfectoïde sera un faisceau d'anneaux topologiques et d'obtenir l'annulation des groupes de cohomologie du faisceau structural en degrés strictement positifs.

Nous construirons ensuite les espaces adiques comme recollements de spectres adiques, d'une façon analogue à la définition des schémas. Cela nous permettra de définir les espaces adiques *analytiques* qu'on pourra considérer comme étant au cœur de la géométrie analytique non-archimédienne. Nous discuterons ensuite la notion de *corps résiduel complété* d'un point d'un espace adique et caractériserons les points des espaces adiques par les morphismes depuis les spectres adiques de *corps affinoïdes*. Nous terminerons le chapitre par quelques exemples d'espaces adiques.

Nous renverrons à la littérature pour les démonstrations de plusieurs énoncés qui auraient demandées une longue exposition. Cela sera notamment le cas des différents théorèmes de spectralité, qui auraient nécessité d'étudier en détail la relation de spécialisation sur le spectre valuatif d'un anneau de Huber.

1.1 Valuations

1.1.1 Premières définitions et propriétés

On fixe un anneau A .

Définition 1.1.1. Un *groupe abélien totalement ordonné* est un groupe abélien Γ (noté multiplicativement) muni d'une relation d'ordre total \leq telle que,

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \Gamma, \quad (\alpha \leq \beta) \implies (\gamma\alpha \leq \gamma\beta).$$

Un *morphisme de groupes abéliens totalement ordonnés* est un morphisme de groupes croissant.

Définition 1.1.2. Soit Γ un groupe abélien totalement ordonné.

- (i) Soit 0 un symbole distinct de tous les éléments de Γ . On étend la loi interne et la relation d'ordre total de Γ à $\Gamma \cup \{0\}$ en posant, pour tout $\gamma \in \Gamma$,

$$0 < \gamma \quad \text{et} \quad 0 \cdot \gamma = \gamma \cdot 0 = 0.$$

Le monoïde multiplicatif totalement ordonné ainsi obtenu est noté Γ_0 .

- (ii) Si $\varphi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ est un morphisme de groupes abéliens totalement ordonnés on note $\varphi_0 : \Gamma_0 \rightarrow \Gamma'_0$ le morphisme de monoïde croissant prolongeant φ par $\varphi_0(0) := 0$.

Définition 1.1.3. Une *valuation* sur A est une application $|\cdot| : A \rightarrow \Gamma_0$, pour Γ un groupe abélien totalement ordonné, vérifiant

$$|0| = 0, \quad |1| = 1, \quad \forall a, b \in A, \quad |ab| = |a| \cdot |b| \quad \text{et} \quad |a + b| \leq \max(|a|, |b|).$$

Remarque 1.1.4. On notera la condition ultramétrique sur l'inégalité triangulaire, excluant de fait les valeurs absolues archimédiennes usuelles sur les corps de nombres, sur \mathbb{R} ou sur \mathbb{C} . La terminologie est un peu malheureuse ici car elle rentre en conflit avec la notion de

valuation (additive) définie (par exemple) dans Bourbaki ([5, Chapitre VI, §3.1, Définition 1]) c'est-à-dire d'une application $v : A \rightarrow \Gamma \cup \{+\infty\}$ (avec Γ un groupe abélien additif totalement ordonné étendu par $\gamma < +\infty$ et $\gamma + (+\infty) = +\infty$) vérifiant

$$v(0) = +\infty, \quad v(1) = 0, \quad v(ab) = v(a) + v(b) \quad \text{et} \quad v(a + b) \geq \min(v(a), v(b)).$$

On pourrait être tenté (très brièvement) d'appeler nos valuations des *semi-normes multiplicatives ultramétriques généralisées* (ou *de rang supérieur*, voir la définition 1.1.15). Étant donné qu'on peut passer d'une valuation multiplicative v à une valuation additive en considérant $-v$, et réciproquement, la distinction entre valuations additives et multiplicatives réside purement dans l'exposition ; c'est pourquoi nous nous bornerons à cette terminologie plus légère.

Définition 1.1.5. Soit $|\cdot| : A \rightarrow \Gamma_0$ une valuation. On note $\text{supp}(|\cdot|)$ le *support* de la valuation, défini par

$$\text{supp}(|\cdot|) := \{a \in A, |a| = 0\}.$$

Lemme 1.1.6. Soit $|\cdot| : A \rightarrow \Gamma_0$ une valuation.

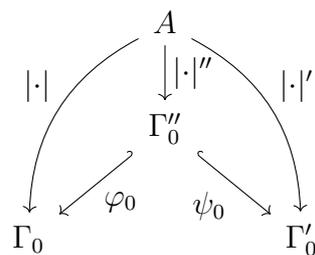
- (i) Le support $\text{supp}(|\cdot|)$ de la valuation est un idéal premier \mathfrak{p} de A .
- (ii) On note $\kappa(\mathfrak{p}) := \text{Frac}(A/\mathfrak{p})$ et $\iota : A \rightarrow \kappa(\mathfrak{p})$ le morphisme canonique. Alors il existe une unique valuation $|\cdot|'$ sur $\kappa(\mathfrak{p})$ telle que $|\cdot| = |\cdot|' \circ \iota$.

Démonstration. (i) C'est une conséquence de la définition de la loi interne de $\Gamma \cup \{0\}$.

- (ii) On étend la valuation à A/\mathfrak{p} par $a + \mathfrak{p} \mapsto |a|$ puis à $\kappa(\mathfrak{p})$ par $\frac{a}{b} \mapsto \frac{|a|}{|b|}$. On vérifie immédiatement que cela donne une valuation $|\cdot|' : \kappa(\mathfrak{p}) \rightarrow \Gamma_0$ telle que $|\cdot| = |\cdot|' \circ \iota$. L'unicité découle de la surjectivité de $A \rightarrow A/\mathfrak{p}$ et du fait que tout élément inversible $a \in A$ vérifie $|a^{-1}| = |a|^{-1}$.

□

Définition 1.1.7. Soient $|\cdot| : A \rightarrow \Gamma_0$ et $|\cdot|' : A \rightarrow \Gamma'_0$ deux valuations sur A . On dit que ces valuations sont *équivalentes* si il existe une valuation $|\cdot|'' : A \rightarrow \Gamma''_0$ et des morphismes injectifs de groupes abéliens totalement ordonnés $\varphi : \Gamma'' \rightarrow \Gamma$ et $\psi : \Gamma'' \rightarrow \Gamma'$ faisant commuter le diagramme



Lemme 1.1.8. Soient $|\cdot| : A \rightarrow \Gamma_0$ et $|\cdot|' : A \rightarrow \Gamma'_0$ deux valuations sur A . Les propositions suivantes sont équivalentes.

- (i) Les valuations $|\cdot|$ et $|\cdot|'$ sont équivalentes.
- (ii) Pour tous $a, b \in A$, on a $|a| \leq |b|$ si et seulement si $|a|' \leq |b|'$.
- (iii) On a

$$\text{supp}(|\cdot|) = \text{supp}(|\cdot|') \quad \text{et} \quad \{a \in A, |a| \leq 1\} = \{a \in A, |a|' \leq 1\}.$$

Démonstration. Montrons (i) \Rightarrow (ii). Soient $a, b \in A$. Avec les notations de la définition 1.1.7, si $|a| \leq |b|$ alors $\varphi(|a|'') \leq \varphi(|b|'')$ donc $|a|'' \leq |b|''$ car φ est croissante injective, puis $|a|' = \psi(|a|'') \leq \psi(|b|'') = |b|'$. Par symétrie on obtient l'équivalence

$$|a| \leq |b| \iff |a|' \leq |b|'.$$

Montrons (ii) \Rightarrow (iii). L'égalité des supports vient du fait que $|a| = 0 \iff |a| \leq |0|$. La deuxième égalité découle de $|1| = 1 = |1|'$.

Montrons (iii) \Rightarrow (i). On note \mathfrak{p} le support commun à $|\cdot|$ et $|\cdot|'$. Le lemme 1.1.6 permet alors de considérer ces valuations comme définies sur $\kappa(\mathfrak{p})$ et donc se ramener au cas où A est un corps K . Pour tous $a, b \in K^\times$, on a

$$\left| \frac{a}{b} \right| \leq 1 \iff \left| \frac{a}{b} \right|' \leq 1,$$

donc

$$|a| \leq |b| \iff |a|' \leq |b|'.$$

On note $\varphi : |K^\times| \hookrightarrow \Gamma$ le morphisme d'inclusion et on définit $\psi : |K^\times| \rightarrow \Gamma'$, $|a| \mapsto |a|'$. Les applications φ et ψ sont des morphismes injectifs de groupes abéliens totalement ordonnés. On obtient immédiatement que la valuation $|\cdot| \rightarrow |K^\times|$ et les morphismes φ, ψ vérifient la définition 1.1.7, ce qui montre que les valuations $|\cdot|$ et $|\cdot|'$ sont équivalentes. \square

Remarque 1.1.9. Dorénavant, si x est une classe d'équivalence de valuations, on notera $|\cdot(x)|$ une valuation représentant x . On vérifiera que toute définition relative à une valuation est bien définie à équivalence près. C'est par exemple le cas du support d'une valuation (définition 1.1.5).

Définition 1.1.10. Soit Γ un groupe abélien totalement ordonné. Un sous-groupe Δ de Γ est un *sous-groupe convexe* de Γ si pour tous $\delta, \delta' \in \Delta$ et tout $\gamma \in \Gamma$ tels que $\delta \leq \gamma \leq \delta'$ on a $\gamma \in \Delta$.

Lemme 1.1.11. Soit Γ un groupe abélien totalement ordonné et Δ, Δ' deux sous-groupes convexes de Γ . Alors on a $\Delta \subseteq \Delta'$ ou $\Delta' \subseteq \Delta$.

Démonstration. Supposons $\Delta \not\subseteq \Delta'$ et soit $\gamma \in \Delta \setminus \Delta'$. Quitte à remplacer γ par γ^{-1} on a $\gamma \leq 1$. Soit $\delta \in \Delta'$. On ne peut avoir $\delta \leq \gamma \leq 1$ ni $\delta^{-1} \leq \gamma \leq 1$ car Δ' est convexe et que $\gamma \notin \Delta'$. On a donc $\gamma \leq \delta \leq 1$ ou $\gamma \leq \delta^{-1} \leq 1$. Cela donne $\delta \in \Delta$ par convexité de Δ . \square

Définition 1.1.12. Soit Γ un groupe abélien totalement ordonné. On note $\text{Spec } \Gamma$ l'ensemble des sous-groupes convexes de Γ , appelé le *spectre* de Γ . À un morphisme $\varphi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ de groupes abéliens totalement ordonnés on associe l'application

$$\text{Spec } \varphi : \text{Spec } \Gamma' \rightarrow \text{Spec } \Gamma, \Delta' \mapsto \varphi^{-1}(\Delta').$$

La formation du spectre d'un groupe abélien totalement ordonné est fonctorielle.

Définition 1.1.13. Soit Γ un groupe abélien totalement ordonné. On appelle *rang convexe* de Γ la borne supérieure dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ des entiers $n \geq 0$ tels qu'il existe une chaîne

$$\Delta_0 \subsetneq \Delta_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \Delta_n$$

d'éléments de $\text{Spec } \Gamma$.

Exemple 1.1.14. (i) L'ensemble \mathbb{Z} des entiers relatifs est un groupe abélien convexe totalement ordonné de rang 1.

(ii) Le logarithme induit un isomorphisme de groupes abéliens totalement ordonnés $\mathbb{R}_+^* \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$; leur rang convexe commun est 1, par la caractérisation des sous-groupes de \mathbb{R} . Plus généralement, tout sous-groupe convexe non trivial de \mathbb{R}_+^* a pour rang convexe 1.

(iii) Si Γ, Γ' sont deux groupes abéliens totalement ordonnés, on munit le produit $\Gamma \times \Gamma'$ de l'ordre lexicographique. Le rang convexe de $\Gamma \times \Gamma'$ est alors la somme du rang convexe de Γ et du rang convexe de Γ' .

Définition 1.1.15. (i) Soit $|\cdot| : A \rightarrow \Gamma_0$ une valuation. Le sous-groupe de Γ engendré par $\Gamma \cap |A|$ est noté $\Gamma_{|\cdot|}$ et appelé le *groupe des valeurs* de la valuation.

(ii) On appelle *rang* d'une valuation de A le rang convexe de son groupe des valeurs. Une valuation de rang 0 sera dite *triviale*. Ce sont les valuations de groupes des valeurs égaux à $\{1\}$.

Proposition 1.1.16. Soit $\Gamma \neq \{0\}$ un groupe abélien totalement ordonné. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) Γ a pour rang convexe 1 ;

(ii) Il existe un morphisme injectif $\Gamma \hookrightarrow \mathbb{R}_+^*$ de groupes abéliens totalement ordonnés ;

(iii) Γ est *archimédien*, i.e. pour tous éléments $x > 1$ et $y \geq 1$ de Γ , il existe un entier $n \geq 0$ tel que $x^n \geq y$.

Démonstration. Voir [5, Chapitre VI §4.5 Proposition 8]. □

Remarque 1.1.17. Ainsi, on considèrera toute valuation de rang 1 comme étant à valeurs dans \mathbb{R}_+ .

Définition 1.1.18. On dit qu'une valuation de rang 1 est une *valuation discrète* si son groupe des valeurs est isomorphe à \mathbb{Z} .

1.1.2 Valuations sur un corps

On regroupe ici plusieurs énoncés généraux sur les anneaux de valuations sur un corps, qui correspondent aux classes d'équivalences de valuations sur ce dernier. On pourra consulter [5, Chapitre VI, §1] ou [27, §8.1.1].

On fixe un corps K .

Définition 1.1.19. Un sous-anneau V de K est un *anneau de valuation de K* si pour tout $x \in K$, on a $x \in V$ ou $x^{-1} \in V$.

Proposition 1.1.20. (i) Tout anneau de valuation V de K est local et intégralement clos ; on note \mathfrak{m}_V son idéal maximal.

(ii) On considère l'ensemble des couples (A, \mathfrak{m}_A) avec A un sous-anneau de K et \mathfrak{m}_A un idéal maximal de A , partiellement ordonné par

$$(A, \mathfrak{m}_A) \leq (B, \mathfrak{m}_B) \iff A \subseteq B \text{ et } \mathfrak{m}_A = A \cap \mathfrak{m}_B.$$

Alors les éléments maximaux pour cet ordre sont exactement les anneaux de valuation de K .

- (iii) Soit V un anneau de valuation de K et V' un sous-anneau de K vérifiant $V \subseteq V' \subseteq K$. Alors V' est un anneau de valuation de K .

Proposition 1.1.21. Pour toute classe d'équivalence de valuations x de K , l'ensemble

$$V = \{a \in K, |a(x)| \leq 1\}$$

est un anneau de valuation de K , d'idéal maximal

$$\mathfrak{m}_V := \{a \in K, |a(x)| < 1\}.$$

Réciproquement, si V est un anneau de valuation de K , l'application quotient $K^\times \rightarrow K^\times/V^\times$ étendue par $0 \mapsto 0$ induit une valuation sur K , de groupe des valeurs $K^\times/V^\times \cup \{0\}$, où l'ordre total sur K^\times/V^\times est défini pour tous $a, b \in K^\times$ par

$$aV^\times \leq bV^\times \iff \frac{a}{b} \in V.$$

Ces applications décrivent une bijection entre l'ensemble des classes d'équivalence de valuations de K et l'ensemble des anneaux de valuations de K .

Proposition 1.1.22. Soient $V \subseteq V'$ des anneaux de valuation de K .

- (i) On a $\mathfrak{m}_{V'} \subseteq \mathfrak{m}_V \subseteq V \subseteq V'$.
- (ii) L'idéal $\mathfrak{m}_{V'}$ est un idéal premier de V et $V' = V_{\mathfrak{m}_{V'}}$.
- (iii) L'anneau $V/\mathfrak{m}_{V'}$ est un anneau de valuation du corps $V'/\mathfrak{m}_{V'}$.
- (iv) Soit \overline{W} un anneau de valuation du corps $V'/\mathfrak{m}_{V'}$. Alors l'image réciproque W de \overline{W} par la projection $V' \rightarrow V'/\mathfrak{m}_{V'}$ est un anneau de valuation de K .

Démonstration. Voir [21, Theorem 10.1] ou les références citées ci-dessus. \square

Remarque 1.1.23. Ainsi, si V est un anneau de valuation de K , tout anneau de valuation de K contenu dans V provient d'un anneau de valuation du corps V/\mathfrak{m}_V .

Proposition 1.1.24. Soit V un anneau de valuation de K . On note Γ_V le groupe des valeurs de la valuation correspondant à V par la proposition 1.1.21.

- (i) On note $\text{ZR}(K, V)$ l'ensemble des anneaux de valuation de K contenant V . Alors l'application

$$\text{ZR}(K, R) \rightarrow \text{Spec}(V), \quad V' \mapsto \mathfrak{m}_{V'}$$

est une bijection décroissante pour l'inclusion, d'inverse

$$\text{Spec}(V) \rightarrow \text{ZR}(K, R), \quad \mathfrak{p} \mapsto V_{\mathfrak{p}}.$$

- (ii) L'application

$$\text{Spec}(V) \rightarrow \text{Spec}(\Gamma_V), \quad \mathfrak{p} \mapsto \{\gamma \in \Gamma_V, \forall a \in \mathfrak{p} |a(x)| < \min(\gamma, \gamma^{-1})\}$$

est une bijection décroissante pour l'inclusion, d'inverse

$$\text{Spec}(\Gamma_V) \rightarrow \text{Spec}(V), \quad \Delta \mapsto \{a \in V, \forall \delta \in \Delta |a(x)| < \delta\}.$$

- (iii) En particulier, le spectre premier de V est totalement ordonné pour l'inclusion et la dimension de Krull de V est égale au rang convexe de la valuation associée à V .

Remarque 1.1.25. Soit V un anneau de valuation de K . Les propositions 1.1.22 et 1.1.24 nous permettent ainsi de mieux comprendre les anneaux de valuations de K contenues dans V ou contenant V . Géométriquement, nous verrons que cela permettra de comprendre les spécialisations ou généralisations (verticales) du point correspondant à V . Voir la remarque 1.1.33.

1.1.3 Spectre valuatif

Soit A un anneau. On rappelle la définition d'une *base d'ouverts* d'un espace topologique dans la définition A.1.1 de l'annexe; nous demandons par convention qu'une base d'ouverts soit stable par intersections finies.

Définition 1.1.26. On appelle *spectre valuatif* de A et on note $\text{Spv}(A)$ l'ensemble des classes d'équivalences de valuations de A . On munit $\text{Spv}(A)$ de la topologie engendrée par les ensembles

$$U\left(\frac{f}{g}\right) := \{x \in \text{Spv}(A), |f(x)| \leq |g(x)| \text{ et } |g(x)| \neq 0\}$$

pour $f, g \in A$. On appelle *ouverts rationnels* les ouverts de $\text{Spv}(A)$ de la forme

$$U\left(\frac{f_1, \dots, f_n}{g}\right) := \{x \in \text{Spv}(A), \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |f_i(x)| \leq |g(x)| \text{ et } |g(x)| \neq 0\}$$

pour $f_1, \dots, f_n, g \in A$. Alors les ouverts rationnels forment une base d'ouverts de $\text{Spv}(A)$.

On a ainsi un foncteur $\text{Ann}^{\text{op}} \rightarrow \text{Top}$ associant à un anneau A son spectre valuatif $\text{Spv}(A)$ et à un morphisme d'anneaux $A \rightarrow B$ l'application continue envoyant $x \in \text{Spv}(B)$ vers la classe d'équivalence de la valuation $|\cdot(x)| \circ f \in \text{Spv}(A)$.

Démonstration. Notons que tout ouvert de la forme $U\left(\frac{f}{g}\right)$ pour $f, g \in A$ est un ouvert rationnel. Vérifions que l'ensemble des ouverts rationnels de $\text{Spv}(A)$ est stable par intersections finies. Soient $U\left(\frac{f_1, \dots, f_n}{g}\right)$ et $U\left(\frac{f'_1, \dots, f'_m}{g'}\right)$ deux ouverts rationnels. On a

$$\begin{aligned} & U\left(\frac{f_1, \dots, f_n}{g}\right) \cap U\left(\frac{f'_1, \dots, f'_m}{g'}\right) \\ &= \left\{x \in \text{Spv}(A), \forall i, j |f_i g'(x)|, |g f'_j(x)| \leq |g g'(x)| \text{ et } |g g'(x)| \neq 0\right\} \\ &= U\left(\frac{f_i g', g f'_j}{g g'}\right). \end{aligned}$$

En particulier, toute intersection finie d'ouverts de la forme $U\left(\frac{f_i}{g_i}\right)$, pour $f_i, g_i \in A$, est un ouvert rationnel. Par définition de la topologie engendrée par les $U\left(\frac{f}{g}\right)$ pour $f, g \in A$, on obtient ainsi que tout ouvert de $\text{Spv}(A)$ est une réunion d'ouverts rationnels; ces derniers forment donc une base d'ouverts de $\text{Spv}(A)$. \square

Corollaire 1.1.27. L'application associant à $x \in \text{Spv}(A)$ le couple

$$(\text{supp}(x), \{a \in \kappa(\text{supp}(x)), |a(x)| \leq 1\})$$

induit une bijection entre $\text{Spv}(A)$ et l'ensemble des couples (\mathfrak{p}, V) pour $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ et V un anneau de valuation de $\kappa(\mathfrak{p})$. L'application réciproque associe à (\mathfrak{p}, V) la classe d'équivalence de la valuation

$$A \longrightarrow \kappa(\mathfrak{p}) \longrightarrow (\kappa(\mathfrak{p})^\times / V^\times \cup \{0\}).$$

Démonstration. C'est une conséquence du lemme 1.1.6 et de la proposition 1.1.21. \square

Remarque 1.1.28. Soient K un corps et V un anneau de valuation de K , associé à la valuation $x \in \text{Spv}(K)$. On notera que pour tout $f, g \in K^\times$, on a

$$|f(x)| \leq |g(x)| \iff \frac{f}{g} \in V$$

et pour $h \in K$, $|h(x)| = 0$ si et seulement si $h = 0$. En voyant les points de $\text{Spv}(K)$ comme les anneaux de valuation V de K , les ouverts rationnels de $\text{Spv}(K)$ sont donc les ouverts

$$U\left(\frac{f_1, \dots, f_n}{g}\right) = \left\{ V \in \text{Spv}(K), \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \frac{f_i}{g} \in V \right\}$$

pour $f_1, \dots, f_n \in K$ et $g \in K^\times$.

On utilise la bijection du corollaire 1.1.27 dans la proposition suivante.

Proposition 1.1.29. On rappelle que $\text{Spec}(A)$ est muni de sa topologie de Zariski.

(i) L'application support induit une application continue surjective

$$\text{supp} : \text{Spv}(A) \rightarrow \text{Spec}(A), (\mathfrak{p}, V) \mapsto \mathfrak{p}.$$

Une section continue est donnée par

$$s : \text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spv}(A), \mathfrak{p} \mapsto (\mathfrak{p}, \kappa(\mathfrak{p})).$$

C'est l'application associant à $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ la composée de la projection $A \rightarrow A/\mathfrak{p}$ et de la valuation triviale $s_{\mathfrak{p}} : A/\mathfrak{p} \rightarrow \{0, 1\}$ envoyant tous les éléments non nuls vers 1.

(ii) Pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$, l'application

$$\text{supp}^{-1}(\mathfrak{p}) \rightarrow \text{Spv}(\kappa(\mathfrak{p})), (\mathfrak{p}, V) \mapsto V$$

induit un homéomorphisme entre la fibre $\text{supp}^{-1}(\mathfrak{p})$ munie de la topologie induite par $\text{Spv}(A)$ et $\text{Spv}(\kappa(\mathfrak{p}))$.

Démonstration. (i) Soit $f \in A$. On a

$$\text{supp}^{-1}(D(f)) = \{x \in \text{Spv}(A), |f(x)| \neq 0\} = U\left(\frac{0}{f}\right)$$

donc supp est continue. Il est clair que s est une section. Soient $f_1, \dots, f_n, g \in A$. On a

$$s^{-1}\left(U\left(\frac{f_1, \dots, f_n}{g}\right)\right) = D(g).$$

donc s est continue.

- (ii) Il est clair que cette application est une bijection. Pour montrer que c'est un homéomorphisme, on utilise la remarque 1.1.28 pour décrire les ouverts rationnels de $\text{Spv}(\kappa(\mathfrak{p}))$ en terme de ses anneaux de valuations. Soient $f_1, \dots, f_n, g \in A$. Si $g \in \mathfrak{p}$ (autrement dit si g n'est pas inversible dans $\kappa(\mathfrak{p})$) on a

$$U\left(\frac{f_1, \dots, f_n}{g}\right) \cap \text{supp}^{-1}(\mathfrak{p}) = \emptyset$$

et sinon on a

$$U\left(\frac{f_1, \dots, f_n}{g}\right) \cap \text{supp}^{-1}(\mathfrak{p}) = \left\{ (\mathfrak{p}, V) \in \text{Spv}(A), \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \frac{f_i}{g} \in V \right\}.$$

Dans le second cas, l'ouvert de droite est envoyé vers l'ouvert rationnel

$$\left\{ V \in \text{Spv}(\kappa(\mathfrak{p})), \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \frac{f_i}{g} \in V \right\}$$

de $\text{Spv}(\kappa(\mathfrak{p}))$. On obtient ainsi une bijection entre les ouverts rationnels de $\text{Spv}(A)$ rencontrant $\text{supp}^{-1}(\mathfrak{p})$ et les ouverts rationnels de $\text{Spv}(\kappa(\mathfrak{p}))$; cela montre que l'application considérée est un homéomorphisme. □

On consultera la définition A.1.2 d'un espace topologique spectral.

Théorème 1.1.30. L'espace topologique $\text{Spv}(A)$ est spectral. Une base d'ouverts quasi-compacts est donnée par les ouverts rationnels.

Démonstration. L'idée est la suivante. On considère l'application $\alpha : \text{Spv}(A) \rightarrow \{0, 1\}^{A \times A}$, défini par, étant donné $x \in \text{Spv}(A)$ et $(f, g) \in A \times A$, $(\alpha(x))_{(f, g)} := 1$ si $|f(x)| \leq |g(x)|$ et 0 sinon. On munit $\{0, 1\}$ de la topologie discrète et $\{0, 1\}^{A \times A}$ de la topologie produit, ce qui en fait un espace compact. On montre alors que l'application α est continue, injective, d'image fermée (donc compacte) et T_0 . On vérifie aussi que l'image d'un ouvert rationnel est ouverte et fermée pour la topologie induite. Un théorème d'Hoschster permet alors d'en déduire la spectralité de $\text{Spv}(A)$. Pour les détails, voir par exemple [16, Proposition 2.2], [23, Theorem I.2.6.1] ou encore [27, Théorème 8.100]. □

La notion de *spécialisation* (ou de *générisation*) dans un espace topologique est rappelé dans la définition A.1.5 de l'annexe.

Remarque 1.1.31. Comme $\text{Spv}(A)$ est spectral, la relation de spécialisation (ou de généralisation) sur $\text{Spv}(A)$ est une relation d'ordre (lemme A.1.6). Soient $x, y \in \text{Spv}(A)$. La topologie est engendrée par les ouverts

$$\{z \in \text{Spv}(A), |f(z)| \leq |g(z)| \neq 0\},$$

donc y est une spécialisation de x si et seulement si, pour tout $f, g \in A$,

$$(|f(y)| \leq |g(y)| \neq 0) \implies (|f(x)| \leq |g(x)| \neq 0).$$

En particulier, soit K un corps et V, V' deux anneaux de valuation de K , vus comme des points de $\text{Spv}(K)$. Alors V est une spécialisation de V' si et seulement si $V \subseteq V'$.

Définition 1.1.32. Soit $x \in \text{Spv}(A)$, de support \mathfrak{p} . Soit $y \in \text{Spv}(A)$ une spécialisation de x dans $\text{Spv}(A)$. On dit que y est une *spécialisation verticale* de x (ou que x est une *générisation verticale* de y) si $y \in \text{supp}^{-1}(\mathfrak{p}) = \text{Spv}(\kappa(\mathfrak{p}))$, c'est-à-dire si $\text{supp}(y) = \text{supp}(x)$.

Remarque 1.1.33. Soit $x = (\mathfrak{p}, V) \in \text{Spv}(A)$. On note $\kappa(x) := \kappa(\mathfrak{p})$. La remarque 1.1.31 et la proposition 1.1.24 permettent donc de paramétriser les générisations verticales de x selon, au choix, les anneaux de valuation de $\kappa(x)$ contenant V , les idéaux premiers de V ou les sous-groupes convexes de Γ_x . Ainsi, l'ensemble des générisations verticales de x est totalement ordonné. En particulier, si x n'est pas triviale alors x admet une unique générisation verticale $\tilde{x} \in \text{Spv}(A)$ de rang 1, à valeurs dans \mathbb{R}_+ par la remarque 1.1.17. Le point x a également une (unique) générisation verticale de rang 0, qui est la composition de la projection $A \rightarrow \kappa(x)$ et de la valuation triviale sur $\kappa(x)$.

De même, par la proposition 1.1.22, on peut paramétrer les spécialisations verticales de x par les anneaux de valuation de V/\mathfrak{m}_V . Cela permet en particulier de construire des valuations de rang ≥ 2 .

Définition 1.1.34. Soit $x \in \text{Spv}(A)$. On note $c\Gamma_x$ et on appelle *sous-groupe caractéristique* de x le sous-groupe convexe de Γ_x engendré par l'ensemble

$$\{|a(x)|, a \in A \text{ vérifiant } |a(x)| \geq 1\}.$$

Définition 1.1.35. Soit $x \in \text{Spv}(A)$ et Δ un sous-groupe convexe de Γ_x vérifiant $c\Gamma_x \subseteq \Delta$. On considère la valuation $x^\Delta : A \rightarrow \Delta$ défini par $|a(x^\Delta)| = |a(x)|$ si $|a(x)| \in \Delta$ et $|a(x^\Delta)| = 0$ sinon. C'est une spécialisation de x . Une spécialisation obtenue de cette façon est appelée une *spécialisation horizontale*; on dit aussi que x est une *générisation horizontale* de x^Δ .

Remarque 1.1.36. On peut considérer $\text{Spv}(A)$ comme un espace fibré au-dessus de $\text{Spec}(A)$. En effet, pour $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Spv}(\kappa(\mathfrak{p})) = \text{supp}^{-1}(\mathfrak{p}) & \xrightarrow{\quad} & \text{Spv}(A) \\ \downarrow \text{supp} & & \downarrow \text{supp} \\ \{\mathfrak{p}\} & \xrightarrow{\quad} & \text{Spec}(A) \end{array}$$

Ainsi, si $x \in \text{Spv}(A)$ un point de support \mathfrak{p} , une spécialisation (resp. générisation) verticale de x est une spécialisation (resp. générisation) s'effectuant verticalement au sein de la fibre $\text{Spv}(\kappa(\mathfrak{p})) \rightarrow \{\mathfrak{p}\}$, tandis qu'une spécialisation (resp. générisation) horizontale voit son support changer, ce qu'on peut interpréter par un déplacement horizontal vers une autre fibre.

On notera que les fibres sont des spectres valuatifs sur des corps. De tels spectres valuatifs sont souvent appelés des *espaces de Zariski-Riemann*. Cela justifie le choix de notation fait dans la proposition 1.1.24 (i).

Bien que nous serons surtout intéressé par les spécialisations verticales dans la suite de ce document, nous mentionnons le théorème suivant qui permet de mieux comprendre la relation de spécialisation dans $\text{Spv}(A)$.

Théorème 1.1.37. Soit $x \in \text{Spv}(A)$. Alors toute spécialisation de x dans $\text{Spv}(A)$ est une spécialisation horizontale d'une spécialisation verticale de x

Démonstration. Voir [27, Proposition 8.109] ou [23, Theorem I.3.4.3]. \square

Exemple 1.1.38. Déterminons $\text{Spv}(\mathbb{Z})$. Par la proposition 1.1.29, on doit d'abord déterminer $\text{Spv}(\mathbb{Q})$ et $\text{Spv}(\mathbb{F}_p)$ pour tout nombre premier p . Comme tout élément non nul de \mathbb{F}_p engendre \mathbb{F}_p^\times , le corps \mathbb{F}_p n'a pas d'anneau de valuation non trivial, et son spectre valuatif ne comporte donc que la valuation triviale s_p . Comme p est fermé dans $\text{Spec}(\mathbb{Z})$, on obtient ainsi un point fermé $s_p \in \text{Spv}(\mathbb{Z})$ pour tout premier p . Soit $x \in \text{Spv}(\mathbb{Q})$ une valuation non triviale. On a $|k(x)| \leq 1$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ par l'inégalité ultramétrique. Comme la valuation est non triviale, on peut trouver $p \in \mathbb{Z}$ tel que $|p(x)| > 0$. Par multiplicativité, on peut supposer p premier. Soit $l \neq p$ un nombre premier. En écrivant $al + bp = 1$ avec a, b des entiers, on trouve $|al(x)| = |(1 - bp)(x)| = |1(x)| = 1$ donc $|l(x)| = 1$. On en déduit que x est équivalente à la valuation p -adique η_p . Soit $y \in \overline{\{\eta_p\}}$ un point dans l'adhérence de η_p . Alors η_p est dans tout ouvert contenant y , donc si $f, g \in \mathbb{Z}$ sont tels que $|f(y)| \leq |g(y)| \neq 0$, c'est-à-dire si $y \in U\left(\frac{f}{g}\right)$, on a $|f(\eta_p)| \leq |g(\eta_p)| \neq 0$. On trouve $y \in \{s_p, \eta_p\}$. Enfin, on a le point η correspondant à la valuation triviale de \mathbb{Q} : on voit qu'il est dense dans $\text{Spv}(\mathbb{Z})$. C'est le point générique.

1.2 Anneaux et paires de Huber

1.2.1 Généralités

Notation 1.2.1. Soient A un anneau et S, T des parties de A .

(i) On note

$$S + T := \{s + t, s \in S \text{ et } t \in T\} \quad \text{et} \quad S \cdot T := \{st, s \in S \text{ et } t \in T\};$$

(ii) On note $\langle S \rangle$ le sous-groupe additif de A engendré par la partie S .

(iii) On note ST l'idéal $\langle S \cdot T \rangle$ de A engendré par l'ensemble des st pour $s \in S$ et $t \in T$.

Remarque 1.2.2. On sera souvent dans la situation où l'on aura un anneau A , un sous-anneau A_0 de A et une partie I_0 de A_0 ; on peut donc voir I_0 comme une partie de A_0 ou de A . Pour $k \geq 0$, la notation I_0^k désignera l'idéal de A_0 engendré par les produits de k éléments de I_0 tandis que $I_0^k A$ désignera l'idéal de A engendré par ces mêmes produits.

La notion d'*anneau topologique* est rappelée dans la définition A.2.2 de l'annexe.

Définition 1.2.3. Soient A un anneau topologique et S une partie de A .

(i) On dit que S est *bornée* si pour tout voisinage ouvert U de 0, il existe un voisinage ouvert V de 0 tel que

$$V \cdot S \subseteq U.$$

(ii) On note pour tout entier $n \geq 1$,

$$S(n) := \{s_1 \dots s_n, s_i \in S\}$$

l'ensemble des produits de n éléments de S . On dit que S est à *puissances bornées* si la partie

$$\bigcup_{n \geq 1} S(n)$$

est bornée dans A .

Lemme 1.2.4. Soit A un anneau topologique ayant une base d'ouverts de 0 formée de sous-groupes additifs. Soient S et T des parties de A .

- (i) Si S est bornée et $T \subseteq S$ alors T est bornée.
- (ii) Si S et T sont des parties bornées de A alors $S \cup T$ et $S \cdot T$ le sont aussi.
- (iii) Si S et T sont à puissances bornées dans A alors $S \cup T$ l'est aussi.
- (iv) S est bornée (resp. à puissances bornées) si et seulement si $\langle S \rangle$ est borné (resp. à puissances bornées).

Démonstration. (i) C'est immédiat.

- (ii) Soit U un voisinage ouvert de 0 . Soient V_1 et V_2 des voisinages ouverts de 0 tels que $V_1 \cdot S \subseteq U$ et $V_2 \cdot T \subseteq U$. Alors $V_1 \cap V_2$ est un voisinage ouvert de 0 tel que

$$(V_1 \cap V_2) \cdot (S \cup T) \subseteq U$$

donc $S \cup T$ est bornée. Soit V_3 un voisinage ouvert de 0 tel que $V_3 \cdot S \subseteq V_2$. Alors

$$V_3 \cdot (S \cdot T) \subseteq V_2 \cdot T \subseteq U$$

donc $S \cdot T$ est bornée.

- (iii) Pour $n \geq 0$ on a l'égalité

$$(S \cup T)(n) = \bigcup_{0 \leq i \leq n} (S(i) \cdot T(n-i))$$

donc

$$\bigcup_{n \geq 0} (S \cup T)(n) = \left(\bigcup_{i \geq 0} S(i) \right) \cdot \left(\bigcup_{j \geq 0} T(j) \right)$$

et le résultat découle du point (ii).

- (iv) On a $S \subseteq \langle S \rangle$ donc S est bornée (resp. à puissances bornées) si $\langle S \rangle$ l'est par (i). Supposons S bornée. Soit U un voisinage ouvert de 0 et V un voisinage ouvert de 0 tel que $V \cdot S \subseteq U$. Quitte à réduire U , on peut supposer que U est un sous-groupe additif de A . Alors $V \cdot \langle S \rangle \subseteq U$ donc $\langle S \rangle$ est bornée. L'implication dans le cas où S est supposée à puissances bornées en découle immédiatement. □

Définition 1.2.5. Soit A un anneau topologique.

- (i) On dit que $a \in A$ est à *puissances bornées* si la partie $\{a\}$ est à puissances bornées, autrement dit si la partie $\{a^n, n \geq 1\}$ est bornée. On note A° l'ensemble des éléments à puissances bornés de A .
- (ii) On dit que $a \in A$ est *topologiquement nilpotent* si la suite $(a^n)_{n \geq 1}$ tend vers 0 dans A . On note $A^{\circ\circ} \subseteq A^\circ$ l'ensemble des éléments topologiquement nilpotents de A .

Proposition 1.2.6. Soit A un anneau topologique ayant une base d'ouverts de 0 formée de sous-groupes additifs.

- (i) L'ensemble A° est un sous-anneau intégralement clos de A .

(ii) L'ensemble $A^{\circ\circ}$ est un idéal radical de A° .

Démonstration. (i) Soient $x, y \in A^\circ$. Le lemme 1.2.4 (iv) montre que la partie

$$\mathbb{Z}[x] = \left\langle \bigcup_{n \geq 0} \{x^n\} \right\rangle$$

est bornée et donc que

$$\mathbb{Z}[x, y] = \mathbb{Z}[x] \cdot \left(\bigcup_{n \geq 0} \{y^n\} \right)$$

est aussi bornée. Cela montre que $x - y$ et xy sont à puissances bornées et donc que A° est un sous-anneau de A . Montrons que A° est intégralement clos dans A . Soit $x \in A$ vérifiant

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$$

avec $n \geq 1$ et $a_i \in A^\circ$. Alors $B := \mathbb{Z}[a_i, 0 \leq i \leq n-1]$ est un sous-anneau borné par répétition de l'argument ci-dessus. Comme les parties $\{x^i\}$ sont bornées par continuité de la multiplication par x^i , on en déduit que

$$B[x] = \left\langle B \cup Bx \cup \dots \cup Bx^{n-1} \right\rangle$$

est borné et donc $x \in A^\circ$.

(ii) Montrons que $A^{\circ\circ}$ est un idéal de A° . Soit $x, y \in A^{\circ\circ}$ et $a \in A^\circ$. Soit U un voisinage ouvert de 0. Quitte à réduire U , on peut supposer que c'est un sous-groupe additif de A .

Il existe $n_0 \geq 1$ tel que $x^n, y^n \in U$ pour tout $n \geq n_0$. Alors par le binôme de Newton, $(x - y)^n \in U$ pour tout $n \geq 2n_0 - 1$; donc $x - y \in A^{\circ\circ}$.

Comme $a \in A^\circ$, il existe un voisinage ouvert V de 0 tel que

$$V \cdot \{a^k, k \geq 1\} \subseteq U.$$

Soit $n_0 \geq 1$ tel que $x^n \in V$ pour tout $n \geq n_0$. Alors pour tout $n \geq n_0$, $(ax)^n = x^n \cdot a^n \in U$; donc $ax \in A^{\circ\circ}$.

Montrons que $A^{\circ\circ}$ est un idéal radical de A° . Soit $k \geq 1$ et $a \in A^\circ$ tel que $a^k \in A^{\circ\circ}$. Soit W un voisinage ouvert de 0 tel que

$$W \cdot \{a^i, i \geq 1\} \subseteq U.$$

Il existe $n_0 \geq 1$ tel que $(a^k)^n \in W$ pour tout $n \geq n_0$. Alors pour tout $r \geq 1$,

$$a^{n_0k+r} = a^{n_0k} \cdot a^r \in W \cdot a^r \subseteq U$$

donc $a \in A^{\circ\circ}$.

□

1.2.2 Anneaux de Huber

Définition 1.2.7. Soit A un anneau topologique. On dit que A est un *anneau de Huber* si il existe un sous-anneau ouvert A_0 de A , tel que la topologie induite sur A_0 soit la topologie I_0 -adique, pour un idéal I_0 de type fini de A_0 . On dit que A_0 est un *anneau de définition* de A et que I_0 est un *idéal de définition* de A_0 . On appelle (A_0, I_0) un *couple de définition*. Un *morphisme* entre anneaux de Huber est un morphisme d'anneaux continu.

Remarque 1.2.8. Les anneaux de Huber sont appelés « f-adic rings » dans l'article original de Huber [16].

Exemple 1.2.9. (i) Tout anneau A muni de la topologie discrète est un anneau de Huber pour $A_0 = A$ (ou n'importe quel sous-anneau) et $I_0 = \{0\}$.

(ii) Tout anneau A muni d'une topologie I -adique pour un idéal I de type fini de A est un anneau de Huber. C'est notamment le cas de \mathbb{Z}_p , avec $I = p\mathbb{Z}_p$, ou $\mathbb{F}_p[[X]]$ avec $I = (X)$. Étant donné un anneau B muni de la topologie discrète, et $n \geq 1$ un entier, c'est aussi le cas de $B[X_1, \dots, X_n]$ ou $B[[X_1, \dots, X_n]]$ avec l'idéal engendré par X_1, \dots, X_n comme idéal de définition.

(iii) \mathbb{Q}_p est un anneau de Huber, avec $(\mathbb{Z}_p, p\mathbb{Z}_p)$ comme couple de définition. Voir la proposition 1.2.35 pour une généralisation de cet exemple.

Lemme 1.2.10. Soit A un anneau de Huber et B un sous-anneau de A . Alors B est un anneau de définition de A si et seulement si B est ouvert et borné dans A .

Démonstration. Supposons que B est un anneau de définition, donc B est ouvert dans A par définition. Il s'agit de voir que B est borné. Soient I un idéal de définition de B et U un voisinage ouvert de 0, qu'on peut supposer de la forme I^k pour $k \geq 1$ un entier. Alors $I^k \cdot B = I^k$ donc B est borné.

Réciproquement, supposons B ouvert et borné dans A . Soit (A_0, I_0) un couple de définition de A . Il existe un entier $k \geq 0$ tel que $I_0^k \subseteq B$ car B est ouvert dans A . Montrons que la topologie induite sur B est la topologie J -adique avec $J := I_0^k B$; il est clair que la topologie J -adique est moins fine que la topologie de B . Soit $U \subseteq B$ un voisinage ouvert de 0 dans B . Comme B est ouvert dans A , il existe un entier $r \geq 1$ tel que $I_0^{kr} \subseteq U$. Comme B est borné, il existe un entier $s \geq 1$ tel que $J^s = \langle I_0^{ks} \cdot B \rangle \subseteq I_0^{kr}$ d'où $J^s \subseteq U$. Cela montre que B porte la topologie J -adique. La démonstration n'est cependant pas terminée car J n'est *a priori* pas un idéal de type fini de B . Soit $T \subseteq I_0^k$ un ensemble fini de générateurs de l'idéal I_0^k de A_0 . Soit J' l'idéal de B engendré par T ; on a $J' \subseteq J$. Par ailleurs,

$$J^2 = I_0^k \cdot (I_0^k B) = I_0^k \cdot J' \subseteq J'$$

donc la topologie J' -adique est égale à la topologie J -adique de B avec J' de type fini. \square

Corollaire 1.2.11. Soit A un anneau de Huber.

- (i) Soient A_0 et A'_0 deux anneaux de définition de A . Alors $A_0 \cap A'_0$ et $A_0 A'_0$ de A sont des anneaux de définition de A .
- (ii) Tout sous-anneau ouvert B de A est un anneau de Huber.
- (iii) Soient $B \subseteq C$ deux sous-anneaux de A avec B borné et C ouvert dans A . Alors il existe un anneau de définition A_0 de A vérifiant $B \subseteq A_0 \subseteq C$.

Démonstration. On utilise le lemme 1.2.10.

- (i) Le sous-anneau $A_0 \cap A'_0$ est ouvert et borné (lemme 1.2.4 (i)) dans A donc c'est un anneau de définition de A . Le sous-anneau $A_0 A'_0 = \langle A_0 \cdot A'_0 \rangle$ est borné (lemme 1.2.4 (ii) et (iv)) et ouvert car il contient le sous-groupe ouvert A_0 .
- (ii) Soit (A_0, I_0) un couple de définition de A . Comme B est ouvert dans A il existe un entier $k \geq 1$ tel que $I_0^k \subseteq B$. Alors $(B \cap A_0, I_0^k)$ est un couple de définition de B .
- (iii) Soit A'_0 un anneau de définition de A . Alors $C' := A'_0 \cap C$ est ouvert et borné dans A donc c'est un anneau de définition. Posons $A_0 := BC'$. Par les mêmes arguments qu'en (i), c'est un anneau de définition de A vérifiant $B \subseteq A_0 \subseteq C$.

□

Proposition 1.2.12. Soit A un anneau de Huber.

- (i) Le sous-anneau A° est ouvert et intégralement clos dans A . Il est de plus égal à la réunion filtrante des anneaux de définition de A .
- (ii) L'idéal radical $A^{\circ\circ}$ de A est un ouvert égal à l'union des idéaux de définition de A .

Démonstration. (i) La proposition 1.2.6 (i) montre que A° est un sous-anneau intégralement clos de A . Soit A_0 un anneau de définition de A . Alors A_0 est borné dans A donc tout élément de A_0 est à puissances bornées, ce qui montre $A_0 \subseteq A^\circ$; on en déduit en particulier que A° est ouvert. Soit A'_0 un autre anneau de définition. Il faut montrer que A_0 et A'_0 sont contenus dans un anneau de définition de A . Le sous-anneau $A_0 A'_0$ convient, par le corollaire 1.2.11 (i). Cela montre que A° contient la réunion filtrante des anneaux de définition de A .

Réciproquement, montrons que tout $x \in A^\circ$ est contenu dans un anneau de définition. L'élément x est à puissances bornées donc par le lemme 1.2.4 (iv), la partie

$$\mathbb{Z}[x] = \left\langle \bigcup_{n \geq 0} \{x^n\} \right\rangle$$

est bornée, donc le sous-anneau

$$A_0[x] = \langle A_0 \cdot \mathbb{Z}[x] \rangle$$

l'est aussi. Comme $A_0[x]$ contient le sous-anneau ouvert A_0 de A , il est ouvert donc c'est un anneau de définition contenant x . Cela montre l'autre inclusion.

- (ii) Par la proposition 1.2.6 (ii) il reste à voir que $A^{\circ\circ}$ est l'union des idéaux de définition de A ; il sera alors ouvert car tout idéal de définition est ouvert. Il est clair que tout élément d'un idéal de définition de A est topologiquement nilpotent. Soit $x \in A^{\circ\circ}$; notons que $\mathbb{Z}[x]$ est borné. Comme $\mathbb{Z}[x] \subseteq A^\circ$, il existe par le corollaire 1.2.11 (iii) un couple de définition (A_0, I_0) de A tel que $x \in A_0$. Soit $n_0 \geq 1$ tel que $x^n \in I_0$ pour tout $n \geq n_0$. Posons $J := I_0 + xA_0$. Alors J est un idéal de type fini de A_0 , ouvert car il contient I_0 , et vérifiant $J^{n_0} \subseteq I_0$. On en déduit que les topologies I_0 -adique et J -adique coïncident sur A_0 , ce qui montre que J est un idéal de définition de A contenant x .

□

Définition 1.2.13. Un anneau de Huber A est dit *uniforme* si A° est borné, ou de façon équivalente si A° est un anneau de définition de A .

Remarque 1.2.14. Ce sera notamment le cas des corps non archimédiens et de leurs algèbres de séries convergentes (proposition 1.2.50) ou des anneaux perfectoïdes (définition 2.1.1).

Exemple 1.2.15. Un exemple d'anneau de Huber non uniforme est $A = \mathbb{Q}_p[X]/X^2$ avec $\mathbb{Z}_p[X]/X^2$ comme anneau de définition, muni de la topologie p -adique ; on a alors

$$A^\circ = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Q}_p X$$

qui n'est pas borné.

Définition 1.2.16. Soit A un anneau de Huber. On dit qu'un sous-anneau $A^+ \subseteq A^\circ$ est un *sous-anneau d'éléments entiers* si A^+ est ouvert et intégralement clos dans A . Un tel couple (A, A^+) est appelé une *paire de Huber*. On dit que cette paire est *complète* (resp. *uniforme*) si A l'est.

Remarque 1.2.17. Soit A un anneau de Huber.

- (i) La proposition 1.2.12 (i) montre que le sous-anneau A° est le plus grand sous-anneau d'éléments entiers de A .
- (ii) La clôture intégrale de $\mathbb{Z} + A^{\circ\circ}$ est le plus petit sous-anneau d'éléments entiers de A . En effet, soit $B \subseteq A^\circ$ un sous-anneau ouvert intégralement clos dans A . Comme B est ouvert, il existe pour tout $a \in A^{\circ\circ}$ un entier $n \geq 1$ tel que $a^n \in B$, d'où $a \in B$ car B est intégralement clos.
- (iii) On peut penser au sous-anneau A^+ comme servant à encoder les comportements au niveau *entier*. On verra dans les exemples 1.3.5 et dans la section 1.4.4 des illustrations de ce phénomène.

Définition 1.2.18. Soient (A, A^+) et (B, B^+) deux paires de Huber. Un *morphisme de paires de Huber*

$$\varphi : (A, A^+) \rightarrow (B, B^+)$$

est un morphisme d'anneaux de Huber $\varphi : A \rightarrow B$ tel que $\varphi(A^+) \subseteq B^+$.

1.2.3 Valuations continues

Soit A un anneau de Huber.

Définition 1.2.19. Soit $x \in \text{Spv}(A)$ une valuation de A .

- (i) La topologie engendrée sur A par les ensembles

$$\{a \in A, |a(x)| < \gamma\}$$

pour $\gamma \in \Gamma_x$ est appelée la *topologie induite par la valuation x sur A* . Cette topologie fait de A un anneau topologique.

- (ii) On dit que x est une *valuation continue* si la topologie induite par x sur A est plus fine que la topologie de A . Autrement dit, x est continue si pour tout $\gamma \in \Gamma_x$, l'ensemble

$$\{a \in A, |a(x)| < \gamma\}$$

est un ouvert de A .

(iii) On note $\text{Cont}(A)$ l'ensemble des valuations continues sur A , muni de la topologie induite par $\text{Spv}(A)$.

Définition 1.2.20. Soit Γ un groupe abélien totalement ordonné. On dit qu'un élément $\gamma \in \Gamma_0$ est *cofinal* si pour tout $\delta \in \Gamma$, il existe $n \geq 1$ tel que $\gamma^n < \delta$.

Lemme 1.2.21. On a

$$\text{Cont}(A) = \{x \in \text{Spv}(A), \forall a \in A^\circ \ |a(x)| \text{ est cofinal dans } \Gamma_x\}.$$

Démonstration. Il est clair que les éléments de A° sont cofinaux si x est continue. Réciproquement, soit (A_0, I_0) un couple de définition de A et f_1, \dots, f_k des générateurs de I_0 . Soit $\delta \in \Gamma_x$; il existe $n \geq 1$ tel que $|f_i(x)|^n < \delta$ pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$. Tout élément de I_0^{n+1} s'écrit comme une somme finie d'éléments de la forme $af_{i_1} \cdots f_{i_{kn}}$ avec $a \in I_0$ et $i_j \in \llbracket 1, k \rrbracket$. Comme $|a(x)| \leq 1$ pour tout $a \in I_0$ car $I_0 \subseteq A^\circ$, on obtient

$$I_0^{n+1} \subseteq \{a \in A, |a(x)| < \delta\},$$

ce qui montre que x est continue. □

1.2.4 Morphismes adiques

Définition 1.2.22. Soient A, B deux anneaux de Huber et $\varphi : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux. On dit que φ est un *morphisme adique* si il existe un couple de définition (A_0, I_0) de A et un anneau de définition B_0 de B vérifiant $\varphi(A_0) \subseteq B_0$ tel que l'idéal $\varphi(I_0)B_0$ soit un idéal de définition de B_0 . Un morphisme de paires de Huber $\varphi : (A, A^+) \rightarrow (B, B^+)$ est dit *adique* si $\varphi : A \rightarrow B$ est un morphisme adique.

Proposition 1.2.23. Soient A, B deux anneaux de Huber et $\varphi : A \rightarrow B$ un morphisme adique.

- (i) Soit (A_1, I_1) un couple de définition de A et B_1 un anneau de définition de B tel que $\varphi(A_1) \subseteq B_1$. Alors $J_1 := \varphi(I_1)B_1$ est un idéal de définition de B_1 .
- (ii) Soit S une partie bornée de A . Alors $\varphi(S)$ est bornée dans B .

Démonstration. Soient (A_0, I_0) un couple de définition de A et B_0 un anneau de définition de B avec $\varphi(A_0) \subseteq B_0$ tel que $J_0 := \varphi(I_0)B_0$ soit un idéal de définition de B_0 .

- (i) On veut montrer que la topologie de B_1 est la topologie J_1 -adique. Soient $s, t \geq 1$ des entiers tels que $I_0^s \subseteq I_1$ et $J_0^t \subseteq B_1$. Alors on a

$$J_0^{s+t} = \varphi(I_0^s)J_0^t \subseteq \varphi(I_1)B_1 = J_1$$

donc J_1 est ouvert dans B_1 .

Soit $U \subseteq B_1$ un voisinage ouvert de 0. Quitte à le réduire, on peut supposer que c'est un idéal de B_1 . Il existe un entier $n \geq 1$ tel que $I_1^n \subseteq \varphi^{-1}(U)$ car φ est continue, d'où

$$J_1^n = \varphi(I_1^n)B_1 \subseteq U.$$

Ainsi B_1 a la topologie J_1 -adique. Enfin, comme $\varphi(A_1) \subseteq B_1$, l'idéal J est un idéal de type fini de B_1 .

- (ii) Soit U un voisinage ouvert de 0 dans B , qu'on peut supposer de la forme J_0^n pour $n \geq 1$. Comme S est bornée, il existe V un voisinage ouvert de 0 dans A tel que $V \cdot S \subseteq U$; on peut supposer V de la forme I_0^m pour $m \geq 1$. Alors

$$J_0^m \cdot \varphi(S) = \varphi(I_0^m \cdot S)B_0 \subseteq J_0^n,$$

donc $\varphi(S)$ est bornée dans B . □

Exemple 1.2.24. On munit \mathbb{Z}_p de la topologie p -adique et $\mathbb{Z}_p[[T]]$ de la topologie (p, T) -adique. Alors le morphisme structural $\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p[[T]]$ n'est pas adique.

Proposition 1.2.25. Soient A, B, C des anneaux de Huber et $\varphi : A \rightarrow B$, $\psi : B \rightarrow C$ des morphismes d'anneaux.

- (i) Si φ et ψ sont adiques alors $\psi \circ \varphi$ l'est aussi.
- (ii) Si φ et ψ sont continues et $\psi \circ \varphi$ est adique, alors ψ est adique.
- (iii) Si φ est une application continue et ouverte alors φ est adique.

Démonstration. Nous omettons la preuve qui n'est pas difficile. Voir [27, Proposition 9.78]. □

Remarque 1.2.26. En particulier, si A est un anneau de Huber et $B \subseteq A$ est un sous-anneau ouvert de A , l'inclusion $B \hookrightarrow A$ est un morphisme adique.

1.2.5 Anneaux de Tate

Définition 1.2.27. Un *anneau de Tate* est un anneau de Huber possédant un élément inversible topologiquement nilpotent, appelé une *pseudo-uniformisante*. Une paire de Huber (A, A^+) avec A un anneau de Tate sera appelée une *paire de Huber-Tate*.

Exemple 1.2.28. Toute extension finie de \mathbb{Q}_p ou $\mathbb{F}_p((T))$ est de Tate, avec son anneau de valuation comme anneau de définition et une uniformisante quelconque (ou même tout élément non nul de l'idéal maximal de l'anneau de valuation) comme pseudo-uniformisante. Tous ces exemples sont des *corps non-archimédiens* (voir définition 1.2.34 et proposition 1.2.35).

Proposition 1.2.29. (i) Soit A un anneau de Tate et A_0 un anneau de définition de A .

Soit $\omega \in A$ une pseudo-uniformisante. Si $\omega \in A_0$, alors $A = A_0 \left[\frac{1}{\omega} \right]$ et ωA_0 est un idéal de définition de A_0 .

- (ii) Réciproquement, soit A_0 un anneau et ω un élément régulier de A . Soit $A := A_0 \left[\frac{1}{\omega} \right]$ le localisé de A_0 selon ω . On munit A de la topologie définie par la filtration $(\omega^k A)_{k \geq 0}$ (voir définition A.2.4). Alors A est un anneau de Tate.

Démonstration. (i) Étant donné que A_0 est ouvert dans A , il existe pour toute pseudo-uniformisante $\omega \in A$ un entier $n \geq 1$ tel que $\omega^n \in A_0$ et ω^n est encore une pseudo-uniformisante de A . Supposons donc $\omega \in A_0$ et soit $x \in A$. Comme ω est topologiquement nilpotent, la suite $(\omega^n x)_{n \geq 1}$ tend vers 0 donc il existe un entier $k \geq 1$ tel que $\omega^k x = a_0 \in A_0$. Alors $x = \frac{a_0}{\omega^k} \in A_0 \left[\frac{1}{\omega} \right]$.

Soit I_0 un idéal de définition de A_0 . Il existe un entier $m \geq 1$ tel que $\omega^m \in I_0$, d'où $\omega^m A_0 \subseteq I_0$. Par ailleurs, l'ensemble ωA_0 est ouvert car c'est l'image réciproque de A_0 par la multiplication par ω^{-1} . Il existe donc un entier $n \geq 1$ tel que $I_0^n \subseteq \omega A_0$. L'anneau A_0 possède donc la topologie ω -adique.

- (ii) On vérifie que A est un anneau de Huber à l'aide du lemme A.2.9, en remarquant que si $a \in A$ on a par définition $\omega^n a \in A_0$ pour $n \geq 0$ assez grand. L'élément ω est alors une pseudo-uniformisante de A , faisant de ce dernier un anneau de Tate. \square

Lemme 1.2.30. Soient A un anneau de Tate, A_0 un anneau de définition et $\omega \in A_0$ une pseudo-uniformisante. Soit S une partie de A . Alors S est bornée si et seulement il existe un entier $n \geq 0$ tel que $S \subseteq \omega^{-n} A_0$.

Démonstration. Supposons S bornée. Alors il existe un voisinage ouvert U de 0 tel que $U \cdot S \subseteq A_0$ car A_0 est ouvert. Il existe un entier $n \geq 0$ tel que $\omega^n A_0 \subseteq U$, d'où $S \subseteq \omega^{-n} A_0$. Réciproquement, supposons $S \subseteq \omega^{-n} A_0$ pour un entier $n \geq 0$. Soit U un voisinage ouvert de 0, qu'on peut supposer de la forme $\omega^k A_0$ pour $k \geq 0$. Alors

$$\omega^{n+k} A_0 \cdot S \subseteq \omega^{n+k} A_0 \cdot \omega^{-n} A_0 = \omega^k A_0.$$

\square

Lemme 1.2.31. Soit $\varphi : A \rightarrow B$ un morphisme entre anneaux de Huber. Supposons que A est un anneau de Tate. Alors B est un anneau de Tate et φ est un morphisme adique.

Démonstration. Soit ω une pseudo-uniformisante de A . Alors $\varphi(\omega)$ est une pseudo-uniformisante de B par continuité de φ ; B est donc un anneau de Tate. Soit B_0 un anneau de définition de B et A'_0 un anneau de définition de A . Le sous-anneau $A'_0 \cap \varphi^{-1}(B_0)$ est ouvert et borné dans A , c'est donc un anneau de définition de A vérifiant $\varphi(A'_0) \subseteq B_0$. Soit $n \geq 1$ un entier tel que $\omega^n \in A_0$. Alors $\varphi(\omega)^n \in B_0$ et la proposition 1.2.29 (i) montre que ωA_0 (resp. $\varphi(\omega^n) B_0$) est un idéal de définition de A_0 (resp. B_0). \square

Lemme 1.2.32. Soient (A, A^+) une paire de Huber-Tate et ω une pseudo-uniformisante de A .

- (i) On a $\omega \in A^+ \subseteq A^\circ$.
- (ii) La paire (A, A^+) est uniforme si et seulement si A^+ est un anneau de définition de A .
- (iii) Si (A, A^+) est uniforme alors la topologie induite sur A^+ est la topologie ωA^+ -adique.

Démonstration. (i) On a $\omega^N \in A^+$ pour un entier $N \geq 1$ car A^+ est ouvert, dont on déduit que $\omega \in A^+ \subseteq A^\circ$ car $A^+ \subseteq A^\circ$ est intégralement clos dans A .

- (ii) On a

$$\omega A^+ \subseteq A^{\circ\circ} \subseteq A^\circ$$

par la proposition 1.2.6 (ii) donc A° est bornée si et seulement si A^+ est borné. Comme A^+ est ouvert par définition, le lemme 1.2.10 permet de conclure.

- (iii) Le point (ii) montre que A^+ est un anneau de définition. On peut alors appliquer la proposition 1.2.29 (i) avec $A_0 = A^+$ et la pseudo-uniformisante ω . \square

Lemme 1.2.33. Soit A un anneau de Tate séparé uniforme. Alors A est réduit.

Démonstration. Soit $\omega \in A^\circ$ une pseudo-uniformisante de A . Comme A est uniforme, le sous-anneau A° est de définition donc possède la topologie ω -adique par la proposition 1.2.29 ; cette dernière est séparée par hypothèse.

Soit $a \in A$ un élément nilpotent. Pour tout entier $n \geq 0$, l'élément $\omega^{-n}a$ est nilpotent donc appartient à A° . Ainsi $a \in \omega^n A^\circ$ pour tout $n \geq 0$ donc $a = 0$ par séparation. \square

Des exemples importants d'anneaux de Tate sont les corps non-archimédiens.

Définition 1.2.34. Un *corps non-archimédien* est un corps complet muni de la topologie induite par une valuation de rang 1.

Proposition 1.2.35. Soit K un corps non-archimédien pour une valuation $|\cdot| : K \rightarrow \mathbb{R}_+$. Alors K est un anneau de Tate uniforme, avec son anneau des entiers (parfois noté \mathcal{O}_K)

$$K^\circ = \{a \in K, |a| \leq 1\}$$

comme anneau de définition et tout élément $\omega \in K$ vérifiant $0 < |\omega| < 1$ comme pseudo-uniformisante. De plus, K° est un anneau de valuation ouvert de K ayant

$$K^{\circ\circ} = \{a \in K, |a| < 1\}$$

comme idéal maximal.

Démonstration. Comme la valuation sur K est non triviale, il existe $\omega \in K$ tel que $0 < |\omega| < 1$. Le reste en découle, en utilisant la proposition 1.2.29 et le lemme 1.2.30. \square

Exemple 1.2.36. Toute extension algébrique de \mathbb{Q}_p ou de $\mathbb{F}_p((T))$ hérite d'une unique valuation de rang 1 prolongeant la valeur absolue usuelle. La complétion d'une telle extension est un corps non-archimédien pour le prolongement de la valeur absolue à la complétion.

1.2.6 Quotient

Définition 1.2.37. Soit (A, A^+) une paire de Huber et I un idéal de A . On note $(A/I, (A/I)^+)$ la paire de Huber *quotient* formée de A/I muni de de la topologie quotient, et de la clôture intégrale $(A/I)^+$ de $A^+/(A^+ \cap I)$ dans A/I . Notons que l'application quotient

$$(A, A^+) \rightarrow (A/I, (A/I)^+).$$

est un morphisme adique.

Cette paire vérifie la propriété universelle suivante : pour tout morphisme adique de paires de Huber

$$\varphi : (A, A^+) \rightarrow (B, B^+)$$

vers une paire de Huber (B, B^+) tel que $I \subseteq \ker(\varphi)$, il existe une unique factorisation de φ par l'application quotient.

1.2.7 Complétion

On s'intéresse à la complétion d'anneaux et de paires de Huber. La complétion d'un anneau topologique (à base dénombrable) est rappelée dans la section A.3.5 de l'annexe. On donne sans démonstration les résultats clefs.

Construction 1.2.38. Soient A un anneau de Huber et (A_0, I_0) un couple de définition de A .

- (i) La complétion \hat{A} de A est un anneau de Huber ayant $(\hat{A}_0, I_0\hat{A}_0)$ comme couple de définition.
- (ii) Les morphismes structuraux $A \rightarrow \hat{A}$ et $A_0 \rightarrow \hat{A}_0$ sont adiques et le morphisme d'anneaux canonique

$$\hat{A}_0 \otimes_{A_0} A \rightarrow \hat{A}, \quad a \otimes b \mapsto ab,$$

est un isomorphisme.

- (iii) On a $(\hat{A}^\circ) = (\hat{A})^\circ$ et $(\hat{A}^{\circ\circ}) = (\hat{A})^{\circ\circ}$.
- (iv) Si A^+ est un sous-anneau d'éléments entiers de A alors la complétion (\hat{A}^+) de A^+ est un sous-anneau d'éléments entiers de \hat{A} .
- (v) La complétion $A \rightarrow \hat{A}$ de (A, A^+) vérifie la propriété universelle suivante : pour tout anneau de Huber complet B et tout morphisme d'anneaux de Huber $f : A \rightarrow B$, il existe un unique morphisme d'anneaux de Huber $\hat{f} : \hat{A} \rightarrow B$ prolongeant f . Ainsi, étant donné un anneau de Huber B et un morphisme $f : A \rightarrow B$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{A} & \xrightarrow{\hat{f}} & \hat{B} \end{array}$$

commute.

Démonstration. Voir [16, Lemma 1.6], [27, §9.4.2] ou [23, §II.3.1]. □

Corollaire 1.2.39. Soit (A, A^+) une paire de Huber.

- (i) Le couple (\hat{A}, \hat{A}^+) est une paire de Huber complète, appelé la *complétion* de la paire (A, A^+) .
- (ii) La complétion $(A, A^+) \rightarrow (\hat{A}, \hat{A}^+)$ vérifie la propriété universelle suivante : pour toute paire de Huber complète (B, B^+) et tout morphisme de paires de Huber

$$f : (A, A^+) \rightarrow (B, B^+),$$

il existe un unique morphisme de paires de Huber

$$\hat{f} : (\hat{A}, \hat{A}^+) \rightarrow (B, B^+)$$

prolongeant f .

Ainsi, étant donné une paire de Huber (B, B^+) et un morphisme de paires de Huber

$$f : (A, A^+) \rightarrow (B, B^+),$$

le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} (A, A^+) & \xrightarrow{f} & (B, B^+) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\hat{A}, \hat{A}^+) & \xrightarrow{\hat{f}} & (\hat{B}, \hat{B}^+) \end{array}$$

commute.

1.2.8 Produit tensoriel

On s'intéresse dans cette section au produit tensoriel d'anneaux de Huber. Cette opération est importante car elle se traduit géométriquement en un produit fibré. On accède ainsi à la possibilité de raisonner par changement de base, opération fondamentale en géométrie algébrique moderne. Le produit tensoriel n'a néanmoins pas dans ce cadre toute la souplesse du produit tensoriel algébrique, car on se heurte au problème habituel de définition d'une topologie adéquate sur le produit tensoriel algébrique. Nous donnons un résultat d'existence lorsque les morphismes structuraux sont adiques.

On note Ann la catégorie des anneaux et AnnHub (resp. AnnHub.ad) la catégorie des anneaux de Huber (resp. des anneaux de Huber avec morphismes adiques).

Proposition 1.2.40. Soient A, B, C des anneaux de Huber et $f : A \rightarrow B$, $g : A \rightarrow C$ des morphismes adiques. Alors il existe une unique structure d'anneau de Huber sur $B \otimes_A C$ le réalisant comme somme amalgamée de B et C selon les morphismes (f, g) dans la catégorie AnnHub (resp. AnnHub.ad), c'est-à-dire comme colimite du diagramme

$$\begin{array}{ccc} B & & C \\ & \swarrow f & \nearrow g \\ & A & \end{array}$$

De plus, en munissant $B \otimes_A C$ de cette structure d'anneau de Huber, les morphismes structuraux

$$B \rightarrow B \otimes_A C, \quad b \mapsto b \otimes 1, \quad \text{et} \quad C \rightarrow B \otimes_A C, \quad c \mapsto 1 \otimes c$$

sont adiques.

Démonstration. Le foncteur d'oubli $\text{AnnHub} \rightarrow \text{Ann}$ a un adjoint à droite (munissant un anneau de sa topologie grossière) donc commute aux colimites. Ainsi la colimite cherchée doit avoir $B \otimes_A C$ comme anneau sous-jacent. L'unicité de la topologie sur $B \otimes_A C$ et du morphisme de factorisation résulte alors de la propriété universelle.

Définissons la topologie de $B \otimes_A C$. Comme f et g sont adiques, il existe un couple de définition (A_0, I_0) de A et B_0 (resp. C_0) un anneau de définition de B (resp. de C) vérifiant

$f(A_0) \subseteq B_0$ (resp. $g(A_0) \subseteq C_0$) et tel que B_0 (resp. C_0) ait la topologie $f(I_0)B_0$ -adique (resp. $g(I_0)C_0$ -adique). On note $(B \otimes_A C)_0$ le sous-anneau image

$$(B \otimes_A C)_0 := \text{Im}(B_0 \otimes_{A_0} C_0 \rightarrow B \otimes_A C)$$

Considérons la topologie sur $B \otimes_A C$ définie par la filtration $(I_0^k(B \otimes_A C)_0)_{k \geq 0}$. Montrons que $B \otimes_A C$ est un anneau de Huber par le lemme A.2.9. Prenons un élément de $B \otimes_A C$, qu'on peut supposer de la forme $b \otimes c$ pour $b \in B$ et $c \in C$. Comme f et g sont adiques, il existe des entiers $k_1, k_2 \geq 0$ tels que $f(b)I_0^{k_1}B_0 \subseteq B_0$ et $g(c)I_0^{k_2}C_0 \subseteq C_0$. On a alors $(b \otimes c) \cdot I_0^{k_1+k_2}(B \otimes_A C)_0 \subseteq (B \otimes_A C)_0$. Cela montre que $((B \otimes_A C)_0, I_0(B \otimes_A C)_0)$ est un couple de définition de $B \otimes_A C$, qui est donc de Huber. Il est alors clair que les morphismes structuraux $B \rightarrow B \otimes_A C$ et $C \rightarrow B \otimes_A C$ sont adiques.

Soient E un anneau de Huber et $p : B \rightarrow E$, $q : C \rightarrow E$ des morphismes d'anneaux de Huber tels que $p \circ f = q \circ g$. Soit $\alpha : B \otimes_A C \rightarrow E$ le morphisme d'anneau obtenu par la propriété universelle du produit tensoriel des anneaux sous-jacents; il s'agit de montrer que α est continu. Soient (E_0, J_0) un couple de définition de E et $n \geq 0$ un entier. Par continuité de p et q , il existe des entiers $k_1, k_2 \geq 0$ tel que $f(I_0)^{k_1}B_0 \subseteq p^{-1}(J_0^n E_0)$ et $g(I_0)^{k_2}C_0 \subseteq q^{-1}(J_0^n E_0)$. On en déduit que

$$I_0^{k_1+k_2}(B \otimes_A C)_0 \subseteq \alpha^{-1}(J_0^n E_0)$$

donc $\alpha^{-1}(J_0^n E_0)$ est ouvert et α est continu.

Enfin, si p et q sont adiques alors α l'est aussi par la proposition 1.2.25 (ii). \square

On note Afd (resp. CAfd) la catégorie des paires de Huber (resp. complètes) et Afd.ad (resp. CAfd.ad) celle des paires de Huber (resp. complètes) avec morphismes adiques.

Remarque 1.2.41. Soient (A, A^+) , (B, B^+) , (C, C^+) des paires des Huber et

$$f : (A, A^+) \rightarrow (B, B^+), \quad g : (A, A^+) \rightarrow (C, C^+)$$

des morphismes adiques. On construit de façon analogue à ci-dessus la somme amalgamée

$$(B \otimes_A C, (B \otimes_A C)^+)$$

de (B, B^+) et (C, C^+) selon (f, g) dans Afd (resp. Afd.ad), en prenant $(B \otimes_A C)^+$ égal à la clôture intégrale de $(B^+ \otimes_{A^+} C^+)$ dans $B \otimes_A C$.

En combinant ceci avec le corollaire 1.2.39, on a ainsi une notion de *produit tensoriel complété* dans la catégorie CAfd (resp. CAfd.ad), vérifiant une propriété universelle adéquate.

1.2.9 Polynômes et séries convergentes

Étant donné un anneau de Huber, le but de cette section est de munir une algèbre de polynômes ou de séries convergentes à coefficients dans cette anneau d'une structure d'anneau de Huber.

Notation 1.2.42. (i) On fixe A un anneau de Huber et (A_0, I_0) un couple de définition de A .

- (ii) Soit $n \geq 1$ un entier. On note $A[\underline{X}] := A[X_1, \dots, X_n]$ et $A[[\underline{X}]] := A[[X_1, \dots, X_n]]$.
- (iii) Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, soit T_i une partie de A tel que l'idéal $T_i A$ de A soit ouvert. Pour tout $\underline{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$, on note $\underline{T}^{\underline{k}}$ la partie $T_1(k_1) \cdots T_n(k_n)$ de A (au sens de la notation 1.2.1) et $\underline{X}^{\underline{k}} := X_1^{k_1} \cdots X_n^{k_n}$.

Remarque 1.2.43. Soit $t_i \in A^\times$ un élément inversible pour tout $1 \leq i \leq n$. En posant $T_i := \{t_i\}$, l'idéal $T_i A = A$ est ouvert pour tout i et on a $\underline{T}^{\underline{k}} = \{t_1^{k_1} \cdots t_n^{k_n}\}$ pour tout $\underline{k} \in \mathbb{N}^n$.

Lemme 1.2.44. La partie $\langle I_0^j \cdot \underline{T}^{\underline{k}} \rangle$ est ouverte dans A pour tout $j \geq 0$ et tout $\underline{k} \in \mathbb{N}^n$.

Démonstration. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'idéal $T_i A$ est ouvert dans A donc il existe $r \geq j$ tel que $I_0^r \subseteq T_i A$ pour tout i . En notant $\underline{k} = (k_1, \dots, k_n)$, on a $I_0^{r k_i} \subseteq T_i^{k_i} A$ pour tout i donc pour $K := k_1 + \cdots + k_n$ on obtient

$$I_0^{rK} \subseteq \underline{T}^{\underline{k}} A.$$

Soient f_1, \dots, f_s des générateurs de l'idéal I_0^{rK} de A_0 . Par l'inclusion précédente, pour tout $j \in \llbracket 1, s \rrbracket$, l'élément f_j s'écrit

$$f_j = \sum_{k=1}^{n_j} t_{j,k} a_{j,k}$$

avec $t_{j,k} \in \underline{T}^{\underline{k}}$, $a_{j,k} \in A$ et $n_j \geq 0$. Soit $m \geq 0$ tel que $I_0^m a_{j,k} \subseteq A_0$ pour tous $j \in \llbracket 1, s \rrbracket$ et $k \in \llbracket 1, n_j \rrbracket$. Ainsi on a

$$I_0^{m+rK} \subseteq \langle A_0 \cdot \underline{T}^{\underline{k}} \rangle.$$

Comme $r \geq j$, on obtient

$$I_0^{r+m+rK} \subseteq \langle I_0^j \cdot \underline{T}^{\underline{k}} \rangle,$$

ce qui montre que $\langle I_0^j \cdot \underline{T}^{\underline{k}} \rangle$ est ouvert dans A . \square

Notation 1.2.45. (i) On note

$$A\langle \underline{X} \rangle_T := \left\{ \sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^n} a_{\underline{k}} \underline{X}^{\underline{k}} \in A[[\underline{X}]], \forall j \geq 0, a_{\underline{k}} \in \langle I_0^j \cdot \underline{T}^{\underline{k}} \rangle \text{ pour presque tout } \underline{k} \in \mathbb{N}^n \right\}.$$

(ii) On note $A[\underline{X}]_T$ le sous-ensemble $A[\underline{X}]$ de $A\langle \underline{X} \rangle_T$ muni de la topologie induite.

(iii) Si $T_i = \{t_i\}$ pour tout i , on note

$$A\left[\frac{X_1}{t_1}, \dots, \frac{X_n}{t_n}\right] := A[\underline{X}]_T \quad \text{et} \quad A\left\langle \frac{X_1}{t_1}, \dots, \frac{X_n}{t_n} \right\rangle := A\langle \underline{X} \rangle_T.$$

(iv) Pour tout $j \geq 0$ on note

$$I_0^j \langle \underline{X} \rangle_T := \left\{ \sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^n} a_{\underline{k}} \underline{X}^{\underline{k}} \in A\langle \underline{X} \rangle_T, \forall \underline{k} \in \mathbb{N}^n a_{\underline{k}} \in \langle I_0^j \cdot \underline{T}^{\underline{k}} \rangle \right\}$$

et

$$I_0^j [\underline{X}]_T := I_0^j \langle \underline{X} \rangle_T \cap A[\underline{X}] = \left\{ \sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^n} a_{\underline{k}} \underline{X}^{\underline{k}} \in A[\underline{X}], \forall \underline{k} \in \mathbb{N}^n a_{\underline{k}} \in \langle I_0^j \cdot \underline{T}^{\underline{k}} \rangle \right\}.$$

Lemme 1.2.46. On a $I_0^j A_0 \langle \underline{X} \rangle_T = I_0^j \langle \underline{X} \rangle_T$ pour tout $j \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Il est clair que

$$I_0^j A_0 \langle \underline{X} \rangle_T \subseteq I_0^j \langle \underline{X} \rangle_T.$$

Soit

$$x = \sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^n} a_{\underline{k}} \underline{X}^{\underline{k}} \in I_0^j \langle \underline{X} \rangle_T.$$

Pour tout $i \geq 0$, posons

$$N_i := \{ \underline{k} \in \mathbb{N}^n, a_{\underline{k}} \in \langle I_0^{j+i} \cdot T^{\underline{k}} \rangle \}.$$

On a $\mathbb{N}^n = \cup_{i \geq 0} N_i$ et les $\mathbb{N}^n \setminus N_i$ sont des parties finies de \mathbb{N}^n . Soient $x_1, \dots, x_s \in I_0^j$ des générateurs de I_0^j comme idéal de A_0 . Pour tout $\underline{k} \in \mathbb{N}^n$, soit $i \in \mathbb{N}$ tel que $\underline{k} \in N_i$. Il existe alors $a_{\underline{k},1}, \dots, a_{\underline{k},s} \in \langle I_0^{j+i-1} \cdot T^{\underline{k}} \rangle$ tels que

$$a_{\underline{k}} = \sum_{r=1}^s a_{\underline{k},r} x_r.$$

En posant pour tout $r \in \llbracket 1, s \rrbracket$

$$y_r := \sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^n} a_{\underline{k},r} \underline{X}^{\underline{k}} \in A_0 \langle \underline{X} \rangle_T$$

on a alors

$$x = x_1 y_1 + \dots + x_s y_s \in I_0^j A_0 \langle \underline{X} \rangle_T.$$

□

Lemme 1.2.47. Soient $j \geq 0$ et $a = \sum_{\underline{k}} a_{\underline{k}} \underline{X}^{\underline{k}} \in A \langle \underline{X} \rangle_T$. Alors il existe $l \geq 0$ tel que pour tout $\underline{k} \in \mathbb{N}^n$ on ait

$$a_{\underline{k}} \cdot I_0^l \subseteq \langle I_0^j \cdot T^{\underline{k}} \rangle.$$

Démonstration. Il existe un ensemble fini $I \subseteq \mathbb{N}^n$ tel que $a_{\underline{k}} \in \langle I_0^j \cdot T^{\underline{k}} \rangle$ pour $\underline{k} \in \mathbb{N}^n \setminus I$ et $a_{\underline{k}} \notin \langle I_0^j \cdot T^{\underline{k}} \rangle$ pour $\underline{k} \in I$. Remarquons que lorsque $\underline{k} \in \mathbb{N}^n \setminus I$, on a déjà

$$a_{\underline{k}} \cdot I_0^j \subseteq \langle I_0^j \cdot T^{\underline{k}} \rangle \cdot I_0^j = \langle I_0^{2j} \cdot T^{\underline{k}} \rangle \subseteq \langle I_0^j \cdot T^{\underline{k}} \rangle.$$

Comme $\langle I_0^j \cdot T^{\underline{k}} \rangle$ est ouvert (lemme 1.2.44) et par continuité de la multiplication par $a_{\underline{k}}$, il existe $j' \geq 0$ tels que $a_{\underline{k}} \cdot I_0^{j'} \subseteq \langle I_0^j \cdot T^{\underline{k}} \rangle$ pour tout $\underline{k} \in I$. En posant $l := j + j'$, on a donc $a_{\underline{k}} \cdot I_0^l \subseteq \langle I_0^j \cdot T^{\underline{k}} \rangle$ pour tout $\underline{k} \in \mathbb{N}^n$. □

Construction 1.2.48. (i) Il existe une unique structure d'anneau de Huber sur $A \langle \underline{X} \rangle_T$ faisant des $I_0^j \langle \underline{X} \rangle_T$, pour $j \geq 0$, une base de voisinages ouverts de 0 ; la paire $(A_0 \langle \underline{X} \rangle_T, I_0 \langle \underline{X} \rangle_T)$ est alors un couple de définition de $A \langle \underline{X} \rangle_T$. Si de plus A est un anneau de Tate alors $A \langle \underline{X} \rangle_T$ est aussi un anneau de Tate.

(ii) Le sous-anneau $A[\underline{X}]_T$ (voir notation 1.2.45 (ii)) de $A \langle \underline{X} \rangle_T$ est un anneau de Huber ayant $(A_0[\underline{X}]_T, I_0[\underline{X}]_T)$ comme couple de définition ; il est en particulier dense dans $A \langle \underline{X} \rangle_T$. Si de plus A est un anneau de Tate alors $A[\underline{X}]_T$ est aussi un anneau de Tate.

(iii) Les morphismes structuraux $A \rightarrow A[\underline{X}]_T$ et $A \rightarrow A\langle \underline{X} \rangle_T$ sont adiques et la partie

$$\Theta = \bigcup_{i=1}^n \{t_i X_i, t_i \in T_i\}$$

est à puissances bornées dans $A[\underline{X}]_T$ et dans $A\langle \underline{X} \rangle_T$.

(iv) On a la propriété universelle suivante pour $A \rightarrow A[\underline{X}]_T$: pour tout anneau de Huber B , tout morphisme d'anneaux de Huber $f : A \rightarrow B$ et tous $b_1, \dots, b_n \in B$ tels que la partie

$$S = \bigcup_{i=1}^n \{f(t_i)b_i, t_i \in T_i\}$$

soit à puissances bornées dans B , il existe un unique morphisme d'anneaux de Huber $A[\underline{X}]_T \rightarrow B$ prolongeant f et envoyant X_i sur b_i .

(v) Supposons que T_i soit une partie bornée de A pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

(a) Si A est séparé (resp. complet) alors $A[\underline{X}]_T$ et $A\langle \underline{X} \rangle_T$ le sont aussi.

(b) La complétion de $A[\underline{X}]_T$ est $\hat{A}\langle \underline{X} \rangle_{\hat{T}}$, où \hat{T} est relatif aux images \hat{T}_i des parties T_i par le morphisme structural $A \rightarrow \hat{A}$.

(c) Supposons A complet. On a la propriété universelle suivante : pour tout anneau de Huber complet B , tout morphisme d'anneaux de Huber $f : A \rightarrow B$ et tout $b_1, \dots, b_n \in B$ tels que

$$S = \bigcup_{i=1}^n \{f(t_i)b_i, t_i \in T_i\}$$

soit à puissances bornées dans B , il existe un unique morphisme d'anneaux de Huber

$$A\langle \underline{X} \rangle_T \rightarrow B$$

prolongeant f et envoyant X_i sur b_i .

Démonstration. Le lemme 1.2.47 permet de vérifier que $A\langle \underline{X} \rangle_T$ est un sous-anneau de $A[[\underline{X}]]$.

On munit $A\langle \underline{X} \rangle_T$ de la topologie induite par la filtration $(I_0^j \langle \underline{X} \rangle_T)_{j \geq 0}$, c'est-à-dire par la topologie I_0 -adique sur $A_0 \langle \underline{X} \rangle_T$ d'après le lemme 1.2.46. Le lemme 1.2.47 combiné avec le lemme A.2.9 montrent alors que $A\langle \underline{X} \rangle_T$ est un anneau de Huber ayant $(A_0 \langle \underline{X} \rangle_T, I_0 \langle \underline{X} \rangle_T)$ comme couple de définition de $A\langle \underline{X} \rangle_T$, et donc que le morphisme structural $A \rightarrow A\langle \underline{X} \rangle_T$ est adique. Les énoncés en (ii) concernant la construction de $A[\underline{X}]_T$ sont immédiats.

Comme les morphismes $A \rightarrow A[\underline{X}]_T$ et $A \rightarrow A\langle \underline{X} \rangle_T$ sont adiques, les anneaux $A[\underline{X}]_T$ et $A\langle \underline{X} \rangle_T$ sont de Tate si A l'est par le lemme 1.2.31. Par ailleurs, comme $\Theta \subseteq A_0 \langle \underline{X} \rangle_T$ et que $A_0 \langle \underline{X} \rangle_T$ est borné dans $A\langle \underline{X} \rangle_T$, on obtient que Θ est à puissances bornées dans $A\langle \underline{X} \rangle_T$ et de même que Θ est bornée dans $A[\underline{X}]_T$.

Montrons (iv). Soit $\tilde{f} : A[\underline{X}]_T \rightarrow B$ l'unique morphisme d'anneau prolongeant f et tel que $\tilde{f}(X_i) = b_i$ pour tout i . Il s'agit de montrer que \tilde{f} est continu. Soit U un voisinage ouvert de 0 dans B , qu'on suppose être un sous-groupe additif. Il existe un voisinage ouvert V de 0 dans B tel que

$$V \cdot \bigcup_{i \geq 1} S(i) \subseteq U$$

Soit $j \geq 0$ tel que $I_0^j \subseteq f^{-1}(V)$. On a alors $\tilde{f}(I_0^j[\underline{X}]_T) \subseteq U$, ce qui montre la continuité de \tilde{f} .

Montrons (v).(a). Supposons A séparé. Comme tous les T_i sont bornés dans A , la partie \underline{T}^k est borné dans A pour tout $\underline{k} \in \mathbb{N}^n$. Par séparation de A , on obtient, pour tout $\underline{k} \in \mathbb{N}^n$:

$$\bigcap_{j \geq 0} \langle I_0^j \cdot \underline{T}^k \rangle = \{0\}$$

d'où

$$\bigcap_{j \geq 0} I_0^j \langle \underline{X} \rangle_T = \{0\}.$$

Ainsi $A \langle \underline{X} \rangle_T$ est séparé, donc $A[\underline{X}]_T$ aussi.

Supposons A complet. Soit

$$\left(\alpha_i := \sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^n} a_{\underline{k}, i} \underline{X}^{\underline{k}} \right)_{i \in \mathbb{N}}$$

une suite de Cauchy de $A \langle \underline{X} \rangle_T$. Pour tout $\underline{k} \in \mathbb{N}^n$, la partie \underline{T}^k est borné dans A , donc la suite $(a_{\underline{k}, i})_{i \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans A , donc converge vers $b_{\underline{k}} \in A$. On vérifie que

$$\beta := \sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^n} b_{\underline{k}} \underline{X}^{\underline{k}} \in A \langle \underline{X} \rangle_T$$

est une limite de la suite $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dans $A \langle \underline{X} \rangle_T$.

On renvoie à [27, Corollaire 9.93] pour (v)(b). Pour (v)(c), on combine (iv), (v)(b) et la construction 1.2.38 (v). \square

Remarque 1.2.49. Étant donné une paire de Huber (A, A^+) , on peut ainsi lui associer des paires de Huber $(A[\underline{X}]_T, A[\underline{X}]_T^+)$ et $(A \langle \underline{X} \rangle_T, A \langle \underline{X} \rangle_T^+)$, où $A[\underline{X}]_T^+$ (resp. $A \langle \underline{X} \rangle_T^+$) désigne la clôture intégrale de $A^+[\underline{X}]_T$ dans $A[\underline{X}]_T$ (resp. de $A^+ \langle \underline{X} \rangle_T$ dans $A \langle \underline{X} \rangle_T$). On adapte de façon immédiate les énoncés de la construction 1.2.48 ci-dessus.

La proposition ci-dessous rappelle quelques propriétés classiques des algèbres de séries convergentes sur un corps non-archimédien. On renvoie à [2] (ou à l'ouvrage encyclopédique [3]) pour une présentation du rôle fondamental qu'elles jouent dans la construction des espaces rigides analytiques de Tate.

Proposition 1.2.50. Soit K un corps non-archimédien, et $n \geq 1$ un entier. On peut considérer la paire de Huber (K, \mathcal{O}_K) , et la construction 1.2.48 nous fournit une paire de Huber uniforme

$$(K \langle X_1, \dots, X_n \rangle, \mathcal{O}_K \langle X_1, \dots, X_n \rangle),$$

avec $(K \langle X_1, \dots, X_n \rangle)^\circ = \mathcal{O}_K \langle X_1, \dots, X_n \rangle$.

(i) Comme $K \langle X_1, \dots, X_n \rangle$ est égal à

$$\left\{ f = \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n} a_{k_1, \dots, k_n} X_1^{k_1} \cdots X_n^{k_n}, a_{k_1, \dots, k_n} \rightarrow 0 \text{ quand } k_1 + \cdots + k_n \rightarrow +\infty \right\},$$

la topologie sur $K \langle X_1, \dots, X_n \rangle$ est induite par la *norme de Gauss* :

$$\|f\| := \sup_{\underline{k} \in \mathbb{N}^n} |a_{\underline{k}}|,$$

faisant ainsi de $K \langle X_1, \dots, X_n \rangle$ une K -algèbre de Banach, ayant $K[X_1, \dots, X_n]$ comme sous- K -algèbre dense.

(ii) L'anneau $K \langle X_1, \dots, X_n \rangle$ est noethérien.

Démonstration. Voir [2, §2.2]. □

Remarque 1.2.51. On peut adapter les énoncés de la proposition 1.2.50 à l'anneau $K \left\langle \frac{X_1}{t_1}, \dots, \frac{X_n}{t_n} \right\rangle$, pour tous $t_1, \dots, t_n \in K^\times$.

1.2.10 Localisation

Étant donné un anneau A , la définition du faisceau structural du spectre premier $\text{Spec}(A)$ de A repose sur les localisations $A \rightarrow A_f$ de A en des éléments $f \in A$. Nous développons ici un formalisme analogue pour les paires de Huber, ce qui permettra de définir le préfaisceau des fonctions adiques sur un espace adique.

Notation 1.2.52. Soient A un anneau de Huber et (A_0, I_0) un couple de définition de A . Soit T une partie de A telle que l'idéal TA de A est ouvert.

Lemme 1.2.53. La sous-groupe additif TA_0 est ouvert dans A .

Démonstration. C'est un cas particulier du lemme 1.2.44. □

Construction 1.2.54. Soit $s \in A$. On note A_s le localisé de A en s .

(i) Il existe une unique structure d'anneau de Huber sur l'anneau A_s faisant de

$$\left(A_0 \left[\frac{t}{s}, t \in T \right], I_0 A_0 \left[\frac{t}{s}, t \in T \right] \right)$$

un couple de définition. On note $A \left(\frac{T}{s} \right)$ cet anneau de Huber. Si de plus A est un anneau de Tate alors $A \left(\frac{T}{s} \right)$ est aussi un anneau de Tate.

(ii) Le morphisme structural

$$\varphi : A \rightarrow A \left(\frac{T}{s} \right)$$

est adique et la partie

$$\left\{ \frac{t}{s}, t \in T \right\}$$

est à puissances bornées dans $A \left(\frac{T}{s} \right)$.

(iii) On a la propriété universelle suivante : pour tout anneau de Huber B et tout morphisme d'anneaux de Huber $f : A \rightarrow B$ avec $f(s)$ est inversible dans B et tel que la partie

$$\left\{ \frac{f(t)}{f(s)}, t \in T \right\}$$

est à puissances bornées dans B , il existe un unique morphisme d'anneaux de Huber

$$A\left(\frac{T}{s}\right) \rightarrow B$$

prolongeant f .

- (iv) On suppose A complet. La complétion $A\left\langle\frac{T}{s}\right\rangle$ de $A\left(\frac{T}{s}\right)$ vérifie la propriété universelle suivante : pour tout anneau de Huber complet B , tout morphisme d'anneaux de Huber $f : A \rightarrow B$ tel que $f(s)$ est inversible dans B et que la partie

$$\left\{ \frac{f(t)}{f(s)}, t \in T \right\}$$

est à puissances bornées dans B , il existe un unique morphisme d'anneaux de Huber

$$A\left\langle\frac{T}{s}\right\rangle \rightarrow B$$

prolongeant f .

Démonstration. On munit A_s de la topologie induite par la filtration $\left(I_0^k A_0 \left[\frac{t}{s}, t \in T\right]\right)_{k \geq 0}$. Montrons avec le lemme A.2.9 que cela fait de A_s de anneau de Huber. Soit

$$a = \frac{b}{s^n} \in A_s,$$

avec $b \in A$ et $n \geq 0$. Par le lemme 1.2.53, il existe $j \geq 0$ tel que $I_0^j \subseteq TA_0$ donc

$$\frac{1}{s} I_0^j \subseteq A_0 \left[\frac{t}{s}, t \in T\right]$$

et

$$\frac{1}{s^n} I_0^{nj} \subseteq A_0 \left[\frac{t}{s}, t \in T\right].$$

Comme par ailleurs il existe $k \geq 0$ tel que $bI_0^k \subseteq A_0$, on obtient

$$\frac{b}{s^n} I_0^{k+nj} \subseteq A_0 \left[\frac{t}{s}, t \in T\right].$$

Ainsi

$$\left(A_0 \left[\frac{t}{s}, t \in T\right], I_0 A_0 \left[\frac{t}{s}, t \in T\right] \right)$$

est un couple de définition de $A\left(\frac{T}{s}\right)$ et le morphisme structural

$$\varphi : A \rightarrow A\left(\frac{T}{s}\right)$$

est adique. Comme

$$\left\{ \frac{t}{s}, t \in T \right\} \subseteq A_0 \left[\frac{t}{s}, t \in T\right]$$

et que le terme de droite est borné, la partie

$$\left\{ \frac{t}{s}, t \in T \right\}$$

est à puissances bornées dans $A\left(\frac{T}{s}\right)$. Cela finit de montrer (i) et (ii).

Montrons (iii). Comme $f(s)$ est inversible dans B , le morphisme f se factorise par un morphisme d'anneau

$$f_s : A\left(\frac{T}{s}\right) \rightarrow B.$$

Montrons que f_s est continu. On note

$$R := \left\{ \frac{f(t)}{f(s)}, t \in T \right\}.$$

Soit U un voisinage ouvert de 0 dans B , qu'on suppose être un sous-groupe additif. Il existe un voisinage ouvert V de 0 dans B tel que

$$V \cdot \bigcup_{i \geq 1} R(i) \subseteq U.$$

Soit $k \geq 0$ tel que $I_0^k A_0 \subseteq f^{-1}(V)$. On obtient $f_s(I_0^k A_0[t/s, t \in T]) \subseteq U$.

Le point (iv) découle de (iii) et de la construction 1.2.38(v). \square

Notation 1.2.55. Si $T = \{f_1, \dots, f_n\}$ est une partie finie, on note aussi $A\left(\frac{t_1, \dots, t_n}{s}\right)$ pour $A\left(\frac{T}{s}\right)$, et lorsque A est complet, $A\left\langle \frac{t_1, \dots, t_n}{s} \right\rangle$ pour $A\left\langle \frac{T}{s} \right\rangle$.

Corollaire 1.2.56. Soient (A, A^+) une paire de Huber, $s \in A$ et T une partie de A tel que l'idéal TA soit ouvert.

(i) On note $A\left(\frac{T}{s}\right)^+$ la clôture intégrale de l'image de $A^+ \left[\frac{t}{s}, t \in T \right]$ dans $A\left(\frac{T}{s}\right)$. Alors cela fait de $\left(A\left(\frac{T}{s}\right), A\left(\frac{T}{s}\right)^+\right)$ une paire de Huber, le morphisme structural

$$(A, A^+) \rightarrow \left(A\left(\frac{T}{s}\right), A\left(\frac{T}{s}\right)^+\right)$$

est adique et on a

$$\left\{ \frac{t}{s}, t \in T \right\} \subseteq A\left(\frac{T}{s}\right)^+.$$

(ii) On a la propriété universelle suivante : pour toute paire de Huber (B, B^+) et tout morphisme de paires de Huber

$$f : (A, A^+) \rightarrow (B, B^+)$$

avec $f(s)$ inversible dans B et tel que

$$\left\{ \frac{f(t)}{f(s)}, t \in T \right\} \subseteq B^+,$$

il existe un unique morphisme de paires de Huber

$$\left(A \left(\frac{T}{s} \right), A \left(\frac{T}{s} \right)^+ \right) \rightarrow (B, B^+)$$

prolongeant f .

(iii) On suppose que la paire (A, A^+) est complète. La complétion $\left(A \left\langle \frac{T}{s} \right\rangle, A \left\langle \frac{T}{s} \right\rangle^+ \right)$ de $\left(A \left(\frac{T}{s} \right), A \left(\frac{T}{s} \right)^+ \right)$ a un morphisme structural

$$(A, A^+) \rightarrow \left(A \left\langle \frac{T}{s} \right\rangle, A \left\langle \frac{T}{s} \right\rangle^+ \right)$$

adique, et vérifie la propriété universelle suivante : pour toute paire de Huber complète (B, B^+) et tout morphisme de paires de Huber

$$f : (A, A^+) \rightarrow (B, B^+)$$

avec $f(s)$ inversible dans B et vérifiant

$$\left\{ \frac{f(t)}{f(s)}, t \in T \right\} \subseteq B^+,$$

il existe un unique morphisme de paires de Huber

$$\left(A \left\langle \frac{T}{s} \right\rangle, A \left\langle \frac{T}{s} \right\rangle^+ \right) \rightarrow (B, B^+)$$

prolongeant f .

1.3 Spectres adiques

1.3.1 Espace topologique du spectre adique

Théorème 1.3.1. Soit A un anneau de Huber. Le spectre $\text{Cont}(A)$ des valuations continues de A est un espace spectral. Une base d'ouverts quasi-compacts est donnée par les *ouverts rationnels*

$$U \left(\frac{f_1, \dots, f_n}{g} \right) := \{x \in \text{Cont}(A), \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |f_i(x)| \leq |g(x)| \text{ et } |g(x)| \neq 0\}$$

pour $f_1, \dots, f_n \in A$ engendrant un idéal *ouvert* de A , et $g \in A$.

Démonstration. Nous ne démontrons pas ce théorème qui ne découle pas de façon élémentaire du théorème 1.1.30. Voir par exemple [27, Théorème 10.12] ou [23, Corollary II.2.2.3]. \square

Proposition 1.3.2. Soit A un anneau de Huber. Pour $S \subseteq A$ une partie de A , on note

$$Z_S := \{x \in \text{Cont}(A), \forall a \in S |a(x)| \leq 1\}.$$

On note \mathcal{F}_A l'ensemble des parties Z_S pour $S \subseteq A$. On note également \mathcal{G}_A l'ensemble des sous-anneaux de A qui sont ouverts et intégralement clos dans A .

(i) L'application

$$\sigma : \mathcal{G}_A \rightarrow \mathcal{F}_A, \quad B \mapsto Z_B$$

est bijective d'inverse

$$\tau : \mathcal{F}_A \rightarrow \mathcal{G}_A, \quad Z \mapsto \{a \in A, \forall x \in Z |a(x)| \leq 1\}.$$

(ii) Soit $B \in \mathcal{G}_A$ vérifiant $B \subseteq A^\circ$. Alors $\sigma(B)$ est une partie dense de $\text{Cont}(A)$.

Démonstration. Voir [27, Proposition 10.21]. □

Définition 1.3.3. Soit (A, A^+) une paire de Huber. On note $\text{Spa}(A, A^+)$ et on appelle *spectre adique* de la paire (A, A^+) l'ensemble

$$\{x \in \text{Cont}(A), \forall a \in A^+, |a(x)| \leq 1\}$$

muni de la topologie induite par $\text{Cont}(A)$. Si (B, B^+) est une paire de Huber et

$$\varphi : (A, A^+) \rightarrow (B, B^+)$$

est un morphisme de paires de Huber, on définit une application continue

$$\text{Spa}(\varphi) : \text{Spa}(B, B^+) \rightarrow \text{Spa}(A, A^+), \quad x \mapsto |\cdot(x)| \circ \varphi.$$

On obtient ainsi un foncteur $\text{Spa} : \text{Afd}^{\text{op}} \rightarrow \text{Top}$ de la catégorie (opposée) des paires de Huber vers celle des espaces topologiques.

Remarque 1.3.4. La proposition 1.3.2 (ii) montre donc que le spectre adique $\text{Spa}(A, A^+)$ d'une paire de Huber (A, A^+) est dense dans $\text{Cont}(A)$.

Exemple 1.3.5. (i) On a déterminé $\text{Spv}(\mathbb{Z})$ et $\text{Spv}(\mathbb{Q})$ dans l'exemple 1.1.38. Comme \mathbb{Z} est discret, toute valuation sur \mathbb{Z} est continue, et de plus majorée par 1 sur \mathbb{Z} par l'inégalité ultramétrique. On a donc $\text{Spa}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \text{Spv}(\mathbb{Z})$ et $\text{Spa}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = \text{Spv}(\mathbb{Q})$. On voit ainsi que $\text{Spa}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ et $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ sont homéomorphes.

(ii) Soit K un corps muni de la topologie discrète et V un anneau de valuation de K . En utilisant la notation de la proposition 1.1.24 et le corollaire 1.1.27, on a l'égalité ensembliste $\text{Spa}(K, V) = \text{ZR}(K, V)$ et une bijection décroissante

$$\varphi : \text{Spa}(K, V) \rightarrow \text{Spec}(V), \quad x \mapsto \{a \in K, |a(x)| < 1\},$$

d'inverse

$$\text{Spec}(V) \rightarrow \text{Spa}(K, V), \quad \mathfrak{p} \mapsto V_{\mathfrak{p}}.$$

Cela donne donc un homéomorphisme entre $\text{Spa}(K, V)$ et $\text{Spec}(V)$.

(iii) Soit K un corps non-archimédien et K^+ un anneau de valuation ouvert et borné de K . Notons que le lemme 1.2.21 montre qu'un anneau de valuation V de K définit une valuation continue de K si et seulement si $K^{\circ\circ} \subseteq \mathfrak{m}_V$. On en déduit que l'exemple précédent induit un homéomorphisme

$$\text{Spa}(K, K^+) \mapsto \text{Spec}(K^+/K^{\circ\circ}), \quad x \mapsto \{a \in K, |a(x)| < 1\},$$

En particulier, $\text{Spa}(K, \mathcal{O}_K) = \{\eta\}$ pour η une valuation de rang 1 définissant la topologie de K .

(iv) La considération des fibres de

$$\text{supp} : \text{Spa}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p) \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z}_p)$$

montre que $\text{Spa}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p) = \{\eta_p, s_p\}$ avec η_p la valuation p -adique, dont le point associé est ouvert, et s_p le point fermé donné par la composition

$$\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{F}_p \rightarrow \{0, 1\}$$

de la valuation triviale sur \mathbb{F}_p et de la projection $\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{F}_p$.

On détaille d'autres exemples de spectres (et d'espaces) adiques dans la section 1.4.4.

Théorème 1.3.6. Soit (A, A^+) une paire de Huber. Le spectre adique $\text{Spa}(A, A^+)$ est un espace spectral. Une base d'ouverts quasi-compacts est donnée par les *ouverts rationnels*

$$\text{Spa}(A, A^+) \left(\frac{f_1, \dots, f_n}{g} \right) := \left\{ x \in \text{Spa}(A, A^+), \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |f_i(x)| \leq |g(x)| \text{ et } |g(x)| \neq 0 \right\}$$

pour $f_1, \dots, f_n \in A$ engendrant un idéal *ouvert* de A , et $g \in A$.

Démonstration. La spectralité de ce sous-ensemble de $\text{Cont}(A)$ vient du fait que la partie

$$\left\{ x \in \text{Cont}(A), \forall a \in A^+, |a(x)| \leq 1 \right\}$$

est un ensemble pro-constructible de l'espace spectral $\text{Cont}(A)$. Voir par exemple [23, Corollary III.2.4] ou [27, Définition 10.24]. \square

Notation 1.3.7. Pour A un anneau de Huber, on notera parfois $\text{Spa}(A) := \text{Spa}(A, A^\circ)$.

Lemme 1.3.8. Soit A un anneau de Huber complet. Alors l'ensemble A^\times des inversibles de A est ouvert dans A , et tout idéal maximal de A est fermé.

Démonstration. Pour tout $a \in A^\circ$, l'élément $1 - a$ est inversible, d'inverse $\sum_{i \geq 0} a^i \in A$, par complétude de A . On en déduit que $1 + A^\circ \subseteq A^\times$. Par la proposition 1.2.12, A° est ouvert dans A , donc $1 + A^\circ$ aussi. Pour tout $a \in A^\times$, $a(1 + A^\circ) \subseteq A^\times$ est un ouvert de A contenant a , par continuité de la multiplication par a , donc A^\times est ouvert.

Soit \mathfrak{m} un idéal maximal de A . Son adhérence $\overline{\mathfrak{m}}$ est encore un idéal de A . Comme $\mathfrak{m} \subseteq A \setminus A^\times$ et que $A \setminus A^\times$ est fermé par ce qui précède, $\overline{\mathfrak{m}}$ ne contient pas 1 donc $\mathfrak{m} = \overline{\mathfrak{m}}$ par maximalité de \mathfrak{m} . \square

Proposition 1.3.9. Soient (A, A^+) une paire de Huber complète et $X = \text{Spa}(A, A^+)$.

(i) On a $A \neq 0$ si et seulement si $\text{Spa}(A, A^+) \neq \emptyset$.

(ii) On a l'égalité

$$A^+ = \{f \in A, \forall x \in X, |f(x)| \leq 1\}.$$

(iii) Soit I un idéal de A . Alors $I = A$ si et seulement si pour tout $x \in X$, il existe $f \in I$ tel que $|f(x)| \neq 0$. En particulier, un élément $f \in A$ est inversible dans A si et seulement si $|f(x)| \neq 0$ pour tout $x \in X$.

Démonstration. (i) Voir [16, Proposition 3.6 (i)] ou [23, Proposition III.4.4.1 (i)].

- (ii) Cela découle de la proposition 1.3.2.
- (iii) Si $I = A$ on peut prendre $f = 1$ pour tout $x \in X$. Sinon, soit \mathfrak{m} un idéal maximal de A contenant I ; il est fermé dans A par le lemme 1.3.8. L'anneau A/\mathfrak{m} est donc complet et séparé pour la topologie quotient. On en déduit une paire de Huber complète $(A/\mathfrak{m}, (A/\mathfrak{m})^+)$ par la définition 1.2.37. On a alors $\text{Spa}(A/\mathfrak{m}, (A/\mathfrak{m})^+) \neq \emptyset$ par (i). Comme le morphisme structural $(A, A^+) \rightarrow (A/\mathfrak{m}, (A/\mathfrak{m})^+)$ induit une bijection (et même un homéomorphisme) de $\text{Spa}(A/\mathfrak{m}, (A/\mathfrak{m})^+)$ sur $\{x \in \text{Spa}(A, A^+), \text{supp}(x) = \mathfrak{m}\}$, il existe alors $x \in \text{Spa}(A, A^+)$ de support \mathfrak{m} , d'où $|f(x)| = 0$ pour tout $f \in I$. \square

Proposition 1.3.10. Soit (A, A^+) une paire de Huber. Le morphisme de complétion $(A, A^+) \rightarrow (\hat{A}, \hat{A}^+)$ induit un homéomorphisme

$$\text{Spa}(\hat{A}, \hat{A}^+) \xrightarrow{\sim} \text{Spa}(A, A^+).$$

et une bijection entre leurs ouverts rationnels respectifs.

Démonstration. Voir [16, Proposition 3.9] ou [23, III.4.2.2]. \square

Remarque 1.3.11. La proposition précédente montre qu'on aurait pu restreindre l'étude aux paires de Huber complètes sans que cela ne change rien géométriquement.

1.3.2 Localisation selon un ouvert rationnel

Théorème 1.3.12. Soient (A, A^+) une paire de Huber et U un ouvert rationnel de $X = \text{Spa}(A, A^+)$.

- (i) Il existe un unique couple $\left((\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U)), \varphi_U \right)$, formé d'une paire de Huber complète $(\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U))$ et d'un morphisme de paires de Huber

$$\varphi_U : (A, A^+) \rightarrow (\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U))$$

tel que :

- (a) L'image ensembliste de

$$\text{Spa}(\varphi_U) : \text{Spa}(\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U)) \rightarrow X$$

est incluse dans U .

- (b) Le couple $\left((\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U)), \varphi_U \right)$ vérifie la propriété universelle suivante : pour toute paire de Huber complète (B, B^+) et tout morphisme de paires de Huber

$$\psi : (A, A^+) \rightarrow (B, B^+)$$

tel que

$$\text{Spa}(\psi) : \text{Spa}(B, B^+) \rightarrow X$$

se factorise ensemblistement par $U \subseteq X$, il existe un unique morphisme de paires de Huber

$$\psi_U : (\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U)) \rightarrow (B, B^+)$$

tel que $\psi = \psi_U \circ \varphi_U$.

(ii) De plus, φ_U est un morphisme adique et $\text{Spa}(\varphi_U)$ induit un homéomorphisme sur son image U ainsi qu'une bijection entre leurs ouverts rationnels respectifs.

Démonstration. L'unicité en (i) vient de la propriété universelle de (i)(b).

Il existe $f_1, \dots, f_n, g \in A$ tels que $U = \left(\frac{f_1, \dots, f_n}{g}\right)$, pour f_1, \dots, f_n engendrant un idéal ouvert de A . On applique le corollaire 1.2.56 avec $T = \{f_1, \dots, f_n\}$ et $s = g$. Cela donne une paire de Huber complète

$$(\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U)) := \left(A \left\langle \frac{f_1, \dots, f_n}{g} \right\rangle, A \left\langle \frac{f_1, \dots, f_n}{g} \right\rangle^+ \right)$$

avec morphisme structural adique

$$(A, A^+) \rightarrow \left(A \left\langle \frac{f_1, \dots, f_n}{g} \right\rangle, A \left\langle \frac{f_1, \dots, f_n}{g} \right\rangle^+ \right).$$

L'énoncé (i) découle alors de la proposition 1.3.9 (ii) et de l'énoncé (ii) du corollaire cité précédemment. On renvoie à [17, Lemme 1.5 (ii)] ou [23, Corollary III.4.3.2] pour l'homéomorphisme et la bijection entre les ouverts rationnels de l'énoncé (ii). \square

Remarque 1.3.13. Si (A, A^+) est une paire de Huber, on a en particulier $\mathcal{O}_X(A) = \hat{A}$ et $\mathcal{O}_X^+(A) = \hat{A}^+$.

Lemme 1.3.14. Soit (A, A^+) une paire de Huber-Tate, $\omega \in A$ une pseudo-uniformisante, $f_1, \dots, f_n \in A$ engendrant l'idéal A , et $g \in A$. En notant $X = \text{Spa}(A, A^+)$, il existe un entier $N \geq 1$ tel qu'on ait l'égalité d'ouverts rationnels

$$X \left(\frac{f_1, \dots, f_n}{g} \right) = X \left(\frac{f_1, \dots, f_n, \omega^N}{g} \right).$$

Démonstration. L'inclusion de l'ouvert de droite dans l'ouvert de gauche est immédiate. Réciproquement, soient $a_1, \dots, a_n \in A$ tels que $a_1 f_1 + \dots + a_n f_n = 1$. Comme A^+ est un ouvert de A et que ω est topologiquement nilpotent, il existe $N \geq 1$ tel que $\omega^N a_i \in A^+$ pour tout i . Si x est dans l'ouvert de gauche, on a alors

$$|\omega^N(x)| = \left| \left[\sum_{i=1}^n (\omega^N a_i) f_i \right] (x) \right| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |f_i(x)| \leq |g(x)| \neq 0,$$

en utilisant que $|a(x)| \leq 1$ si $a \in A^+$, donc x est dans l'ouvert de droite. \square

1.3.3 Préfaisceaux sur le spectre adique

Soit (A, A^+) une paire de Huber et $X = \text{Spa}(A, A^+)$.

On note CAnnTop la catégorie des anneaux topologiques complets avec morphismes d'anneaux continus. Le lemme A.3.12(ii) montre que cette catégorie est complète, c'est-à-dire qu'elle a toutes les limites finies.

Définition 1.3.15. On définit un couple $(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X^+)$ de préfaisceaux d'anneaux topologiques complets sur $X = \text{Spa}(A, A^+)$. Si U est un ouvert rationnel de X , le couple $(\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U))$ est la paire de Huber complète fournie par le théorème 1.3.12. Pour W un ouvert quelconque de X , on considère

$$\mathcal{O}_X(W) := \varinjlim_{U \subseteq W} \mathcal{O}_X(U) \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_X^+(W) := \varinjlim_{U \subseteq W} \mathcal{O}_X^+(U),$$

où les limites sont prises dans la catégorie CAnnTop et sont indexées selon les ouverts rationnels U de X contenus dans W . On appelle \mathcal{O}_X le *préfaisceau des fonctions adiques* sur X et \mathcal{O}_X^+ le *préfaisceau des fonctions adiques entières* sur X .

Remarque 1.3.16. (i) En général, $\mathcal{O}_X(U)$ n'est pas un anneau de Huber pour un ouvert U quelconque de X (voir [19, Remark 1.2.4] par exemple).

(ii) À la différence du faisceau structural d'un schéma affine, le préfaisceau \mathcal{O}_X n'est pas toujours un faisceau. On renvoie à [17, §1] [7, §4] et [22] pour des exemples de paires de Huber dont le préfaisceau n'est pas un faisceau.

(iii) Le préfaisceau \mathcal{O}_X que nous avons défini voit ses sections vivre dans des anneaux topologiques complets (séparés). Il existe deux autres définitions alternatives, qui utilisent respectivement des anneaux *topologiquement locaux* et des anneaux *henséliens*. Voir [13, §15.5] (ou [27, §12.1.1] pour le cas topologiquement local). Dans les deux cas, on retrouve la définition 1.3.15 après complétion.

Proposition 1.3.17. (i) Pour tout ouvert W de X , on a

$$\mathcal{O}_X^+(W) = \{f \in \mathcal{O}_X(W), \forall x \in X \ |f(x)| \leq 1\}.$$

(ii) Si \mathcal{O}_X est un faisceau d'anneaux topologiques alors \mathcal{O}_X^+ est un faisceau d'anneaux topologiques.

Démonstration. (i) Si W est un ouvert rationnel, l'égalité vient de la proposition 1.3.9 (ii) appliquée à la description d'un ouvert rationnel comme spectre adique d'une localisation rationnelle rencontrée dans la démonstration du théorème 1.3.12. Si W est un ouvert quelconque, on a

$$\begin{aligned} \{f \in \mathcal{O}_X(W), \forall x \in X \ |f(x)| \leq 1\} &= \varinjlim_{U \subseteq W} \{f \in \mathcal{O}_X(U), \forall x \in X \ |f(x)| \leq 1\} \\ &= \varinjlim_{U \subseteq W} \mathcal{O}_X^+(U) = \mathcal{O}_X^+(W), \end{aligned}$$

où U parcourt les ouverts rationnels contenus dans W .

(ii) C'est immédiat en utilisant (i). □

On rappelle qu'une paire de Huber (A, A^+) est *uniforme* (définition 1.2.13) si A° est borné.

Définition 1.3.18. On dit que la paire (A, A^+) est *stablement uniforme* si pour tout ouvert rationnel de X , la paire de Huber

$$(\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U))$$

est uniforme.

Remarque 1.3.19. Le corollaire 2.3.13 (ii) montrera que tout anneau perfectoïde (définition 2.1.1) est stablement uniforme.

Théorème 1.3.20. On suppose que (A, A^+) est une paire de Huber complète. Alors les préfaisceaux $(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X^+)$ sont des faisceaux d'anneaux topologiques dans les cas suivants :

- (i) L'anneau A a la topologie discrète.
- (ii) L'anneau A est une algèbre de type fini sur un anneau de définition noethérien.
- (iii) L'anneau A est un anneau de Tate *fortement noethérien*, c'est-à-dire que A est noethérien et que pour tout entier $n \geq 1$, l'anneau $A\langle X_1, \dots, X_n \rangle$ est noethérien.
- (iv) L'anneau A est un anneau de Tate stablement uniforme.

De plus, si l'une de ces conditions est vérifiée, on a $H^k(U, \mathcal{O}_X) = 0$ pour tout ouvert rationnel U de X et tout entier $k > 0$.

Démonstration. La démonstration de ce théorème est un peu délicate. Le cas (i) se réduit essentiellement au cas des schémas. Nous démontrons le cas (iv) dans la section 1.3.5, dont la démonstration s'adapte au cas (iii) sous réserve d'avoir un analogue de la proposition 1.3.34.

On renvoie à [17, Theorem 2.2] pour les cas (ii) et (iii), ou à [23, Theorem IV.1.1.5] qui traite tous les cas. On peut aussi traiter simultanément les cas (ii) et (iii) par la notion d'*anneau universellement analytiquement noethérien* selon la terminologie de Ramero [27, Définition 12.34 et remarque 12.35] (mais originaire de l'article [11]). \square

Remarque 1.3.21. (i) Le théorème 1.3.20 permet d'associer un espace adique (définition 1.4.2) à diverses classes d'anneaux utilisées en géométrie algébrique non-archimédienne. Le cas (i) s'applique en effet à tout anneau commutatif muni de la topologie discrète, qui sont les objets de base en théorie des schémas. Le cas (ii) s'applique aux anneaux noethériens et complets pour une topologie I -adique avec I un idéal de type fini, particulièrement utilisées pour les schémas formels. Le cas (iii) est pertinent pour les algèbres de séries convergentes à coefficients dans un corps non-archimédiens et leurs quotients (proposition 1.2.50 (ii)), qui permettent de construire les espaces rigides analytiques de Tate (voir [2]). Le cas (iv) sera appliqué aux spectres adiques d'anneaux perfectoïdes dans le chapitre 2.

- (ii) Les conditions sous lesquelles le préfaisceau d'une paire de Huber est un faisceau semblent encore mal comprises. On pourra consulter [19, §1.2] pour une discussion détaillée dans le cas des anneaux analytiques (qui sont une généralisation des anneaux de Tate ; voir la définition 1.4.5).

1.3.4 Fibres

Soient (A, A^+) une paire de Huber et $X = \text{Spa}(A, A^+)$.

Définition 1.3.22. Pour tout $x \in X$, on note

$$\mathcal{O}_{X,x} := \varinjlim_{x \in U} \mathcal{O}_X(U)$$

la *fibre* de x , où la colimite est prise selon les ouverts U de X contenant x , dans la catégorie des anneaux. On définit de même

$$\mathcal{O}_{X,x}^+ := \varinjlim_{x \in U} \mathcal{O}_X^+(U),$$

à nouveau dans la catégorie des anneaux.

Remarque 1.3.23. Comme les ouverts rationnels forment une base de X , on aurait aussi pu prendre la colimite selon les ouverts rationnels U de X contenant x . Cela servira dans la proposition ci-dessous.

Proposition 1.3.24. Soit $x \in X$.

(i) La fibre $\mathcal{O}_{X,x}$ de x est munie d'une valuation

$$|\cdot(x)| : \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \Gamma_{x,0}$$

prolongeant pour tout ouvert rationnel U de X la valuation

$$|\cdot(x)| : \mathcal{O}_X(U) \rightarrow \Gamma_{x,0}$$

induite par restriction de la valuation

$$|\cdot(x)| : A \rightarrow \Gamma_{x,0}.$$

(ii) La fibre $\mathcal{O}_{X,x}$ de x est un anneau local, d'idéal maximal

$$\mathfrak{m}_x = \{f \in \mathcal{O}_{X,x}, |f(x)| = 0\}.$$

(iii) On a

$$\mathcal{O}_{X,x}^+ = \{f \in \mathcal{O}_{X,x}, |f(x)| \leq 1\},$$

et $\mathcal{O}_{X,x}^+$ est un anneau local, d'idéal maximal

$$\mathfrak{m}_x^+ = \{f \in \mathcal{O}_{X,x}, |f(x)| < 1\}.$$

(iv) Soient (B, B^+) une paire de Huber, $Y = \text{Spa}(B, B^+)$,

$$\psi : (A, A^+) \rightarrow (B, B^+)$$

un morphisme d'anneaux de Huber et $y \in Y$ tel que $\text{Spa}(\psi)(y) = x$. Alors

$$\text{Spa}(\psi) : Y \rightarrow X$$

induit un morphisme d'anneaux locaux

$$\text{Spa}(\psi)_y^* : \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{Y,y}$$

tel que

$$|\cdot(y)| \circ \text{Spa}(\psi)_y^* = |\cdot(x)|.$$

De plus, $\text{Spa}(\psi)_y^*$ induit également un morphisme d'anneaux locaux :

$$\text{Spa}(\psi)_y^* : \mathcal{O}_{X,x}^+ \rightarrow \mathcal{O}_{Y,y}^+.$$

Démonstration. (i) Pour tout ouvert rationnel U contenant x , le théorème 1.3.12(ii) montre que la valuation

$$|\cdot(x)| : A \rightarrow \Gamma_{x,0}$$

se prolonge de façon unique en une valuation continue, majorée par 1 sur $\mathcal{O}_X(U)^+$:

$$|\cdot(x)| : \mathcal{O}_X(U) \rightarrow \Gamma_{x,0}.$$

En passant à la colimite (filtrante) sur les ouverts rationnels contenant x , on obtient une valuation :

$$|\cdot(x)| : \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \Gamma_{x,0}.$$

- (ii) L'ensemble \mathfrak{m}_x est le support de x dans $\mathcal{O}_{X,x}$ donc \mathfrak{m}_x est un idéal (premier) de $\mathcal{O}_{X,x}$. Soit $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ tel que $|f(x)| \neq 0$. Montrons que f est inversible. Il existe un ouvert rationnel U de X et un élément de $\mathcal{O}_X(U)$ dont f est l'image par le morphisme $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$; on note encore f cet élément. Soit (B_0, J_0) un couple de définition de $(\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X(U)^+)$ et notons b_1, \dots, b_n des générateurs de l'idéal J_0 de B_0 . Comme les b_i sont topologiquement nilpotents, il existe un entier $k \geq 0$ tel que

$$\left| (b_1^{k_1} \dots b_n^{k_n})(x) \right| \leq |f(x)|$$

pour tout $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ vérifiant $k_1 + \dots + k_n = k$. En notant c_1, \dots, c_m des générateurs de l'idéal J_0^k , on voit donc que x appartient à l'ouvert rationnel

$$U \left(\frac{c_1, \dots, c_m}{f} \right)$$

de $\mathrm{Spa}(\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X(U)^+)$, en remarquant que cet ouvert est bien rationnel car l'idéal $J_0^k \mathcal{O}_X(U)$ engendré par les c_i dans $\mathcal{O}_X(U)$ est ouvert car il contient le sous-groupe ouvert J_0^k . La proposition 1.3.9(iii) montre alors que f est inversible dans $\mathcal{O}_X(U)$, donc son image dans $\mathcal{O}_{X,x}$ l'est aussi. Ainsi $\mathfrak{m}_x = \mathcal{O}_{X,x} \setminus (\mathcal{O}_{X,x})^\times$ donc $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau local d'idéal maximal \mathfrak{m}_x .

- (iii) Il est clair que

$$\mathcal{O}_{X,x}^+ \subseteq \{f \in \mathcal{O}_{X,x}, |f(x)| \leq 1\}.$$

Réciproquement, soit $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ tel que $|f(x)| \leq 1$. Il existe un ouvert rationnel U de X tel que f soit l'image de $f \in \mathcal{O}_X(U)$ par $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$. L'ensemble

$$V = \{y \in U, |f(y)| \leq 1\}$$

est un ouvert de $U = \mathrm{Spa}(\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X(U)^+)$, car la topologie sur ce dernier est induite par la topologie du spectre valuatif $\mathrm{Spv}(\mathcal{O}_X(U))$. Enfin, comme $x \in V$ et que $|f(x)| \leq 1$, on a $f \in \mathcal{O}_X^+(V)$ donc $f \in \mathcal{O}_{X,x}^+$.

Il est clair que \mathfrak{m}_x^+ est un idéal de $\mathcal{O}_{X,x}^+$. Soit $f \in \mathcal{O}_{X,x}^+$ tel que $|f(x)| = 1$. Comme f est inversible dans $\mathcal{O}_{X,x}$, on obtient $|f^{-1}(x)| = 1$ donc f est inversible dans $\mathcal{O}_{X,x}^+$. Cela montre que $\mathcal{O}_{X,x}^+$ est un anneau local d'idéal maximal \mathfrak{m}_x^+ .

- (iv) Comme $\mathrm{Spa}(\psi)(y) = x$, on a $|\cdot(y)| \circ \mathrm{Spa}(\psi)_y^* = |\cdot(x)|$. On applique ensuite (ii) et (iii). \square

1.3.5 Théorème d'acyclicité de Tate

On montre dans cette section le cas (iv) du théorème 1.3.20. Soit (A, A^+) une paire de Huber-Tate complète et $X = \text{Spa}(A, A^+)$. On renvoie à la section A.5 pour les notations et les résultats sur la cohomologie de Čech.

Définition 1.3.25. Soit \mathcal{F} un faisceau de groupes abéliens sur X

- (i) Soit U un ouvert rationnel de X . Pour tout entier $k \geq 0$, on note $H^k(U, \mathcal{F})$ le k -ième groupe de cohomologie des faisceaux de U à coefficients dans $\mathcal{F}|_U$.
- (ii) On dit que \mathcal{F} est *acyclique* si $H^k(U, \mathcal{F}) = 0$ pour tout ouvert rationnel U de X et tout entier $k > 0$.

Remarque 1.3.26. Soit $f_1, \dots, f_n \in A$ engendrant l'idéal A , et $g \in A$. Alors on a l'égalité

$$\{x \in X, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket |f_i(x)| \leq |g(x)| \neq 0\} = \{x \in X, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket |f_i(x)| \leq |g(x)|\}.$$

En effet, si x est dans l'ensemble de droite mais vérifie $|g(x)| = 0$, alors $|f_i(x)| = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$, ce qui contredit le fait que les f_1, \dots, f_n engendrent l'idéal A .

Définition 1.3.27. (i) Un recouvrement de X par des ouverts rationnels est appelé un *recouvrement rationnel*.

- (ii) Soient $f_1, \dots, f_n \in A$ engendrant l'idéal A . Les ouverts rationnels (pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$)

$$X \left(\frac{f_1, \dots, f_n}{f_i} \right) = \{x \in X, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket |f_j(x)| \leq |f_i(x)|\}$$

forment un recouvrement de X . Un tel recouvrement est appelé un *recouvrement standard* (de paramètres f_1, \dots, f_n) de X .

- (iii) Soient $f_1, \dots, f_n \in A$. Pour toute partie $I \subseteq \llbracket 1, n \rrbracket$ on note

$$U_I := \{x \in X, \forall i \in I |f_i(x)| \leq 1 \text{ et } \forall j \notin I |f_j(x)| \geq 1\}.$$

Les $(U_I)_{I \subseteq \llbracket 1, n \rrbracket}$ forment un recouvrement de X , appelé un *recouvrement de Laurent* (de paramètres f_1, \dots, f_n). Notons que pour tout $I \subseteq \llbracket 1, n \rrbracket$, l'ouvert U_I est égal à l'ouvert rationnel $X \left(\frac{U_I}{s_I} \right)$, où

$$s_I := \prod_{j \notin I} f_j \quad \text{et} \quad T_I := \{1\} \cup \{f_i s_I, i \in I\} \cup \left\{ \prod_{k \notin (I \cup \{j\})} f_k, j \notin I \right\}.$$

- (iv) Soit $f \in A$. Un recouvrement de Laurent de X ayant pour paramètres $f_1 = f$ et $f_2 = 1$ est appelé un *recouvrement de Laurent élémentaire* (de paramètre f). Il est constitué des ouverts rationnels

$$U = \{x \in X, |f(x)| \leq 1\} \text{ et } V = \{x \in X, |f(x)| \geq 1\}.$$

Proposition 1.3.28. (i) Tout recouvrement de X est raffiné par un recouvrement rationnel standard de X .

- (ii) Soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement rationnel standard de X . Alors il existe un recouvrement de Laurent \mathcal{V} de X tel que pour tout $V \in \mathcal{V}$, le recouvrement $(V \cap U_i)_{i \in I}$ de U_i soit un recouvrement rationnel standard à paramètres inversibles.
- (iii) Tout recouvrement rationnel standard à paramètres inversibles est raffiné par un recouvrement de Laurent à paramètres inversibles.

Démonstration. Montrons (i). Quitte à raffiner le recouvrement initial et par quasi-compacité de X , on peut supposer que le recouvrement est constitué d'un nombre fini d'ouverts rationnels $\mathcal{U} = (U_i)_{1 \leq i \leq n}$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe donc $f_{i,1}, \dots, f_{i,n_i} \in A$ engendrant l'idéal A et $g_i \in A$ tels que

$$U_i = X \left(\frac{f_{i,1}, \dots, f_{i,n_i}}{g_i} \right).$$

On pose

$$S_0 := \left\{ \prod_{1 \leq i \leq n} s_i, s_i \in \{f_{i,1}, \dots, f_{i,n_i}, g_i\} \right\} \text{ et } S := \left\{ \prod_{1 \leq i \leq n} s_i \in S_0, \exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket s_i = g_i \right\}.$$

Montrons que S engendre l'idéal A par la proposition 1.3.9 (iii). Pour $x \in X$, il existe un indice i tel que $x \in U_i$. On pose $s_i = g_i$ et pour tout $j \neq i$, on choisit $s_j \in \{f_{j,1}, \dots, f_{j,n_j}\}$ tel que $|s_j(x)|$ soit maximal. On a alors $|s_j(x)| \neq 0$ car les $(f_{j,k})_{1 \leq k \leq n_j}$ engendrent A . En posant $s := \prod_{1 \leq i \leq n} s_i$, on a $s \in S$ et $|s(x)| \neq 0$. Cela permet de conclure.

Considérons le recouvrement rationnel standard de paramètres $s \in S$. Ce dernier raffine \mathcal{U} car si $s = \prod_{1 \leq i \leq n} s_i \in S$ est tel que $s_i = g_i$ alors en posant, pour tout $k \in \llbracket 1, n_i \rrbracket$

$$t_k := s_1 \cdots s_{i-1} f_{i,k} s_{i+1} \cdots s_n \in S$$

on a, pour tout $x \in X$,

$$|t_k(x)| \leq |s(x)| \Leftrightarrow |f_{i,k}(x)| \leq |s(x)|$$

donc en particulier

$$X \left(\frac{t \in S}{s} \right) \subseteq V_i.$$

Pour (ii) et (iii), on renvoie à [20, Lemma 2.4.19] ou [23, Proposition IV.2.3.3]. \square

Corollaire 1.3.29. Soit \mathcal{P} une propriété portant sur des recouvrements rationnels d'ouverts rationnels de X . On suppose que \mathcal{P} vérifie les conditions suivantes :

- (i) La propriété \mathcal{P} est *locale* : si \mathcal{P} est vérifiée pour le raffinement d'un recouvrement, alors le recouvrement initial vérifie aussi \mathcal{P} ;
- (ii) La propriété \mathcal{P} est *transitive* : soit U un ouvert rationnel de X , $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement rationnel de U et $(U_{i,j})_{j \in J_i}$ un recouvrement rationnel de U_i pour tout $i \in I$; si \mathcal{P} est vérifiée pour le recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ de U et pour chaque recouvrement $(U_{i,j})_{j \in J_i}$ de U_i pour tout $i \in I$, alors \mathcal{P} est vérifiée pour le recouvrement $(U_{i,j})_{i \in I, j \in J_i}$ de U .
- (iii) \mathcal{P} est vérifiée pour tout recouvrement de Laurent élémentaire d'un ouvert rationnel de X .

Alors \mathcal{P} est vérifiée pour tout recouvrement rationnel d'un ouvert rationnel de X .

Démonstration. La démonstration repose sur la proposition 1.3.28. On renvoie à [20, Lemma 2.4.20] ou [23, Proposition IV.2.3.4] pour les détails. \square

Rappelons la définition A.5.5.

Définition 1.3.30. Soient \mathcal{F} un préfaisceau de groupes abéliens sur X et $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement d'un ouvert U de X . On dit que \mathcal{U} est \mathcal{F} -acyclique si l'application

$$\mathcal{F}(U) \rightarrow \check{H}^0(U, \mathcal{F}, \mathcal{U}), \quad f \mapsto (f|_{U_i})_{i \in I}$$

est un isomorphisme et si on a $\check{H}^k(U, \mathcal{F}, \mathcal{U}) = 0$ pour tout $k > 0$.

Corollaire 1.3.31. Soit \mathcal{F} un préfaisceau de groupes abéliens sur X . On considère la propriété \mathcal{P} portant sur un recouvrement \mathcal{U} d'un ouvert rationnel U de X : pour tout ouvert rationnel V de U et $V \cap \mathcal{U} := (V \cap W)_{W \in \mathcal{U}}$, le recouvrement rationnel $V \cap \mathcal{U}$ de V est \mathcal{F} -acyclique.

Alors la propriété \mathcal{P} vérifie les conditions (i) et (ii) du corollaire 1.3.29. Ainsi, si \mathcal{P} est vérifiée pour tout recouvrement de Laurent élémentaire d'un ouvert rationnel de X , alors \mathcal{P} est vérifiée pour tout recouvrement rationnel d'un ouvert rationnel de X .

Démonstration. La condition (i) découle de la proposition A.5.10 et la condition (ii) de la proposition A.5.11. \square

Proposition 1.3.32. Soit \mathcal{F} un préfaisceau de groupes abéliens sur X tel que pour tout ouvert U de X on ait

$$\mathcal{F}(U) = \varprojlim_{V \subset U} \mathcal{F}(V)$$

où la limite porte sur les ouverts rationnels contenus dans U . On suppose que tout recouvrement rationnel d'un ouvert rationnel de X est \mathcal{F} -acyclique. Alors :

- (i) \mathcal{F} est un faisceau.
- (ii) \mathcal{F} est acyclique.

Démonstration. (i) Tout recouvrement rationnel \mathcal{U} d'un ouvert rationnel U de X induit un isomorphisme

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\sim} \check{H}^0(U, \mathcal{F}, \mathcal{U}).$$

On peut donc appliquer le lemme A.5.6 et la remarque A.5.7.

- (ii) On suit [33, Tag 01EW] (avec \mathcal{O}_X égal au faisceau constant sur X associé à \mathbb{Z}). Soit $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}$ une injection de \mathcal{F} vers \mathcal{I} un faisceau injectif de groupes abéliens sur X . Par [33, Tag 01EP], tout recouvrement rationnel \mathcal{U} d'un ouvert rationnel U de X est \mathcal{I} -acyclique. Soit $\mathcal{Q} = \mathcal{F}/\mathcal{I}$ le faisceau quotient. On a une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{Q} \rightarrow 0.$$

Par [33, Tag 01EU], on en déduit pour tout ouvert rationnel U de X une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{I}(U) \rightarrow \mathcal{Q}(U) \rightarrow 0.$$

Si \mathcal{U} est un recouvrement rationnel d'un ouvert rationnel U , on a donc une suite exacte courte de complexes de Čech

$$0 \rightarrow \check{C}^\bullet(U, \mathcal{F}, \mathcal{U}) \rightarrow \check{C}^\bullet(U, \mathcal{I}, \mathcal{U}) \rightarrow \check{C}^\bullet(U, \mathcal{Q}, \mathcal{U}) \rightarrow 0.$$

En passant à la suite exacte longue associée, on obtient que tout recouvrement rationnel d'un ouvert rationnel de X est \mathcal{Q} -acyclique. Par ailleurs, si U est un ouvert rationnel de X on a une suite exacte longue

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & H^0(U, \mathcal{F}) & \longrightarrow & H^0(U, \mathcal{I}) & \longrightarrow & H^0(U, \mathcal{Q}) \\
& & & & & \searrow & \\
& & H^1(U, \mathcal{F}) & \longrightarrow & H^1(U, \mathcal{I}) & \longrightarrow & H^1(U, \mathcal{Q}) \\
& & & & & \searrow & \\
& & \dots & & \dots & & \dots
\end{array}$$

Comme \mathcal{I} est injectif on a $H^k(\mathcal{U}, \mathcal{I}) = 0$ pour tout $k > 0$. La flèche

$$H^0(U, \mathcal{I}) = \mathcal{I}(U) \longrightarrow \mathcal{Q}(U) = H^0(U, \mathcal{Q})$$

est surjective donc $H^1(U, \mathcal{F}) = 0$. Comme \mathcal{Q} vérifie les hypothèses de l'énoncé d'après ce qui précède, on a aussi $H^1(U, \mathcal{Q}) = 0$. En raisonnant par récurrence sur la suite exacte longue et par annulation de la cohomologie de \mathcal{I} , on obtient $H^k(U, \mathcal{F}) = 0$ pour tout $k > 0$. □

Remarque 1.3.33. Ainsi, par le corollaire 1.3.31 et la proposition 1.3.32, il nous reste à voir que tout recouvrement de Laurent élémentaire de X est \mathcal{O}_X -acyclique pour obtenir que \mathcal{O}_X est un faisceau acyclique, lorsque A est stablement uniforme. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 1.3.34. On suppose que A est uniforme. Soit $f \in A$,

$$U := \{x \in X, |f(x)| \leq 1\}, \quad V := \{x \in X, |f(x)| \geq 1\}$$

et $\mathcal{U} = \{U, V\}$ le recouvrement élémentaire de X associé. Alors le complexe de Čech alterné associé à \mathcal{U}

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(X) \rightarrow \mathcal{O}_X(U) \oplus \mathcal{O}_X(V) \rightarrow \mathcal{O}_X(U \cap V) \rightarrow 0$$

est exact. Ainsi \mathcal{U} est un recouvrement \mathcal{O}_X -acyclique de X .

Démonstration. On note

$$\alpha : A \rightarrow A \left(\frac{f}{1} \right), \quad \beta : A \rightarrow A \left(\frac{1}{f} \right), \quad \lambda : A \left(\frac{f}{1} \right) \rightarrow A \left(\frac{f}{1}, \frac{1}{f} \right), \quad \mu : A \left(\frac{1}{f} \right) \rightarrow A \left(\frac{f}{1}, \frac{1}{f} \right)$$

les morphismes de localisation, qui sont continus. Par la proposition A.3.8, il suffit de montrer que la suite

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} A \left(\frac{f}{1} \right) \oplus A \left(\frac{1}{f} \right) \xrightarrow{\delta} A \left(\frac{f}{1}, \frac{1}{f} \right) \rightarrow 0$$

est exacte et que les morphismes $\varepsilon := \alpha \oplus \beta$ et $\delta := \lambda - \mu$ sont stricts (définition A.3.7). Comme α et μ sont des isomorphismes au niveau des anneaux sous-jacents, on voit que ε est injectif et que δ est surjectif. Il est clair que $\text{Im}(\varepsilon) \subseteq \text{Ker}(\delta)$. Réciproquement, soit (a, b)

dans le terme du milieu tel que $0 = \delta(a, b) = a - b \in A[1/f]$. Comme $a \in A$, on a $b \in A$ donc $\varepsilon(a) = (a, b)$. Cela montre que la suite est exacte.

Soit $\omega \in A^\circ$ une pseudo-uniformisante de A . Notons que $A^\circ[f]$, $A^\circ[1/f]$ et $A^\circ[f, 1/f]$ sont des anneaux de définition respectifs de $A\left(\frac{f}{1}\right)$, $A\left(\frac{1}{f}\right)$ et $A\left(\frac{f}{1}, \frac{1}{f}\right)$, tous trois munis de la topologie ω -adique. Pour tout $n \geq 0$, on a

$$\delta(\omega^n A^\circ[f] \oplus \omega^n A^\circ[1/f]) = \omega^n A^\circ[f, 1/f]$$

donc δ est une application ouverte. Comme elle est surjective, cela montre que c'est un morphisme strict.

Pour montrer que l'injection ε est un morphisme strict, il suffit de montrer que les groupes

$$\varepsilon^{-1}(\omega^n A^\circ[f] \oplus \omega^n A^\circ[1/f]) = \omega^n (\alpha^{-1}(A^\circ[f]) \cap \beta^{-1}(A^\circ[1/f]))$$

pour $n \geq 0$ forment une base de voisinages ouverts de 0 dans A . Il suffit de montrer que

$$\alpha^{-1}(A^\circ[f]) \cap \beta^{-1}(A^\circ[1/f]) \subseteq A^\circ.$$

Soit $a \in \alpha^{-1}(A^\circ[f]) \cap \beta^{-1}(A^\circ[1/f])$. Il existe $n \geq 0$ tel que $\omega^n f \in A^\circ$. Comme $a \in \beta^{-1}(A^\circ[1/f])$, il existe $a_0 \in A^\circ$ et $k \geq 0$ tel que $a = a_0/f^k \in A^\circ[1/f]$ dont on déduit qu'il existe $l \geq 0$ tel que $f^{l+k}a - f^l a_0 = 0$ dans A . Par ailleurs, il existe $P \in A^\circ[X]$ de degré $m \geq 0$ tel que $a = P(f)$. Montrons par récurrence sur $t \geq 0$ que

$$\omega^{n(l+k+m)} Q(f) a^t \in A^\circ.$$

pour tout polynôme $Q \in A^\circ[X]$ de degré inférieur ou égal à $l+k+m$. Pour $t=0$ et en se ramenant au cas d'un monôme $Q = X^i$ avec $i \in \llbracket 0, l+k+m \rrbracket$, on a

$$\omega^{n(l+k+m)} f^i = \underbrace{(\omega^n f)^i}_{\in A^\circ} \omega^{l+k+m-i} \in A^\circ.$$

Ensuite, pour $t \geq 1$, en se ramenant encore à un monôme X^i , il y a deux cas. Si $i \leq l+k$ alors

$$\omega^{n(l+k+m)} f^i a^t = \omega^{n(l+k+m)} f^i P(f) a^{t-1} = \omega^{n(l+k+m)} \left(\sum_{j=0}^{l+k+m} c_j f^j \right) a^{t-1}$$

pour des $c_j \in A^\circ$. Cette expression est dans A° par l'hypothèse de récurrence. Si $i = l+k+i'$ avec $1 \leq i' \leq m$ alors

$$\omega^{n(l+k+m)} f^i a^t = \omega^{n(l+k+m)} f^{i'} (f^{l+k} a) a^{t-1} = \omega^{n(l+k+m)} f^{i'} (a_0 f^l) a^{t-1}$$

car $f^{l+k} a = f^l a_0$. On applique là aussi l'hypothèse de récurrence.

Ainsi, en posant $N = n(l+k+m)$ et $Q = 1$, on a $\omega^N a^t \in A^\circ$ pour tout $t \geq 0$. Comme A° est un anneau de définition, on en déduit que $a \in A^\circ$. \square

Théorème 1.3.35. On suppose que (A, A^+) est stablement uniforme. Alors le préfaisceau \mathcal{O}_X est un faisceau d'anneaux topologiques et $H^k(U, \mathcal{O}_X) = 0$ pour tout ouvert rationnel U de X et tout $k > 0$.

Démonstration. Notons que tout ouvert rationnel U de X est le spectre adique d'une paire de Huber-Tate complète uniforme, donc tous les résultats précédents portant sur X s'appliquent aussi à U . En combinant la remarque 1.3.33 et la proposition 1.3.34, on obtient que \mathcal{O}_X est un faisceau d'anneaux et que $H^k(U, \mathcal{O}_X) = 0$ pour tout ouvert rationnel U de X et tout $k > 0$. Il reste à montrer que \mathcal{O}_X est un faisceau d'anneaux topologiques. Par [14, Chapitre 0, (3.1.4) et (3.2.2)], il suffit de montrer que pour tout recouvrement rationnel $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ d'un ouvert rationnel U de X , la suite de groupes abéliens

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(U) \rightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{O}_X(U_i) \rightarrow \prod_{i, j \in I} \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$$

est exacte et que le morphisme

$$\varphi : \mathcal{O}_X(U) \rightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{O}_X(U_i)$$

est strict. On sait déjà que la suite est exacte. On peut supposer que I est fini par quasi-compactité de X . Par exactitude de la suite ci-dessus, l'image de φ est égal au noyau de l'application continue $\prod_{i \in I} \mathcal{O}_X(U_i) \rightarrow \prod_{i, j \in I} \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$. Elle est donc complète car fermé dans $\prod_{i \in I} \mathcal{O}_X(U_i)$. Par le théorème 1.4.8, l'application surjective $\varphi : \mathcal{O}_X(U) \rightarrow \text{Im}(\varphi)$ est ouverte donc c'est un morphisme strict. \square

Remarque 1.3.36. En inspectant la démonstration du théorème 1.3.35, on peut constater que le seul endroit où l'on a utilisé l'hypothèse d'uniforme stabilité est dans la proposition 1.3.34. Pour obtenir le théorème dans le cas fortement noethérien, il nous suffirait donc d'avoir un analogue de cette proposition. Voir par exemple [23, §IV.3.3].

1.4 Espaces adiques

1.4.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1.4.1. Définissons une catégorie \mathcal{V} .

- Les objets de \mathcal{V} sont les triplets $(X, \mathcal{O}_X, (|\cdot(x)|)_{x \in X})$ avec X un espace topologique, \mathcal{O}_X un faisceau d'anneaux topologiques complets sur X et où $|\cdot(x)| \in \text{Spv}(\mathcal{O}_{X,x})$ est pour tout $x \in X$ une valuation sur la fibre $\mathcal{O}_{X,x}$ de x . On notera souvent X un tel triplet.
- Un morphisme

$$(f, \varphi) : (X, \mathcal{O}_X, (|\cdot(x)|)_{x \in X}) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y, (|\cdot(y)|)_{y \in Y})$$

est la donnée d'un couple (f, φ) formé d'une application continue $f : X \rightarrow Y$ et d'un morphisme de faisceaux d'anneaux topologiques $\varphi : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ tel que pour tout $x \in X$, le morphisme d'anneaux $\varphi_x : \mathcal{O}_{Y, f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ induit sur la fibre en x (par le morphisme de faisceaux $f^{-1}\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$ associé à φ) vérifie

$$|\cdot(f(x))| = \text{Spv}(\varphi_x)(|\cdot(x)|).$$

On notera souvent f un tel morphisme.

Définition 1.4.2. (i) Un *espace adique affinoïde* est un objet de \mathcal{V} isomorphe à

$$\left(\text{Spa}(A, A^+), \mathcal{O}_X, (|\cdot(x)|)_{x \in X} \right),$$

pour (A, A^+) une paire de Huber et $X = \text{Spa}(A, A^+)$, tel que \mathcal{O}_X soit un faisceau.

- (ii) Un *espace adique* est un objet $(X, \mathcal{O}_X, (|\cdot(x)|)_{x \in X})$ de \mathcal{V} tel qu'il existe un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de X , de façon à ce que $(U_i, \mathcal{O}_{X|U_i}, (|\cdot(x)|)_{x \in U_i})$ soit isomorphe à un espace adique affinoïde pour tout $i \in I$. On dira généralement que X est un espace adique et on notera $|X|$ l'espace topologique sous-jacent.
- (iii) Un *morphisme d'espace adique* est un morphisme de \mathcal{V} entre espaces adiques. La catégorie EspAd des espaces adiques est donc une sous-catégorie pleine de \mathcal{V} .

Notation 1.4.3. On note Afd.F (resp. CAfd.F) la sous-catégorie pleine de Afd formée des paires de Huber (resp. complètes) dont le préfaisceau des fonctions adiques est un faisceau.

Proposition 1.4.4. On a les propriétés suivantes.

- (i) Le foncteur

$$\text{Spa} : \text{CAfd.F} \rightarrow \text{EspAd}, \quad (A, A^+) \mapsto \text{Spa}(A, A^+)$$

est pleinement fidèle.

- (ii) Soient X un espace adique et (A, A^+) un objet de Afd.F . Si $f : X \rightarrow \text{Spa}(A, A^+)$ est un morphisme d'espace adique, on obtient en considérant les sections globales un morphisme de paires de Huber

$$(A, A^+) \rightarrow (\mathcal{O}_X(X), \mathcal{O}_X^+(X)).$$

Cette association induit une bijection, fonctorielle en (A, A^+) et en X :

$$\text{Hom}_{\text{Ann.Top}} \left((A, A^+), (\mathcal{O}_X(X), \mathcal{O}_X^+(X)) \right) = \text{Hom}_{\text{EspAd}} \left(X, \text{Spa}(A, A^+) \right).$$

Démonstration. Voir [17, Proposition 2.1]. □

1.4.2 Espaces adiques analytiques

Définition 1.4.5. Soit A un anneau de Huber. On dit que A est *analytique* si l'idéal $A^\circ A$ de A engendré par les éléments topologiquement nilpotents est égal à A . On dit qu'une paire de Huber (A, A^+) est *analytique* si A l'est.

Proposition 1.4.6. Soit (A, A^+) une paire de Huber. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) A est analytique.
- (ii) Pour tout couple de définition (A_0, I_0) de A , l'idéal $I_0 A$ de A engendré par I_0 est égal à A .
- (iii) Le seul idéal ouvert de A est A .
- (iv) Pour tout idéal $I \subsetneq A$ de A , la topologie quotient sur A/I n'est pas discrète.
- (v) Le seul A -module topologique discret est 0.

(vi) Pour tout $x \in \text{Spa}(A, A^+)$, la valuation induite (lemme 1.1.6) par x sur $\kappa(x) := \text{Frac}(A/\text{supp}(x))$ est non triviale.

Démonstration. Voir [19, Lemma 1.1.3]. □

Exemple 1.4.7. Tout anneau de Tate est analytique. En effet, tout idéal ouvert contenant une pseudo-uniformisante donc est égal à l'anneau tout entier.

En adaptant la démonstration classique du théorème de l'application ouverte, ou en utilisant le théorème de Baire, on démontre le résultat suivant.

Théorème 1.4.8. Soit A un anneau de Huber analytique complet et M, N des A -modules topologiques complets (séparés) possédant une base dénombrable de voisinages de 0. Soit $f : M \rightarrow N$ une application A -linéaire continue. Si f est surjective alors f est une application ouverte.

Démonstration. Voir [19, Theorem 1.1.9], [27, Problème 9.33] ou [23, §II.4]. □

Définition 1.4.9. Soit (A, A^+) une paire de Huber. On dit que $x \in \text{Spa}(A, A^+)$ est *analytique* si le noyau de $|\cdot(x)|$ n'est pas ouvert dans A . Sinon, on dit que x est *non analytique*.

Remarque 1.4.10. Si x est un point non analytique sur $\text{Spa}(A, A^+)$ alors x provient d'une valuation sur l'anneau discret $(A/\text{supp}(x), (A/\text{supp}(x))^+)$. On peut donc penser aux points non analytiques comme relevant de la géométrie algébrique classique.

Proposition 1.4.11. Soit $(A, A^+) \in \text{CAfd.F}$ et $X := \text{Spa}(A, A^+)$.

- (i) L'anneau A est analytique si et seulement tous les points de $\text{Spa}(A, A^+)$ sont analytiques.
- (ii) Un point $x \in X$ est analytique si et seulement si il existe un ouvert rationnel U contenant x tel que $\mathcal{O}_X(U)$ soit un anneau de Tate.

Démonstration. (i) Soit $I = A^{\circ\circ}A$ l'idéal ouvert de A engendré par les éléments topologiquement nilpotents. On a l'égalité

$$\{x \in \text{Spa}(A, A^+), x \text{ n'est pas analytique}\} = \{x \in \text{Spa}(A, A^+), \forall a \in I, |a(x)| = 0\}.$$

En effet, si x est dans l'ensemble de droite, alors x définit une valuation continue sur l'anneau discret A/I donc le support de x est ouvert dans A , ce qui montre que x n'est pas analytique. Réciproquement, si $x \in \text{Spa}(A, A^+)$ est non analytique alors son support est un idéal premier ouvert de A . Ainsi, si $a \in A^{\circ\circ}$ il existe $n \geq 1$ tel que $a^n \in \text{supp}(x)$, ce qui donne $a \in \text{supp}(x)$. On en déduit que $I \subseteq \text{supp}(x)$, ce qui donne l'autre inclusion.

Ainsi tous les points de $\text{Spa}(A, A^+)$ sont analytiques si et seulement $I = A$, c'est-à-dire si A est analytique.

- (ii) Soit (A_0, I_0) un couple de définition de A . Supposons x analytique. Comme $\text{supp}(x)$ n'est pas ouvert il existe $f \in I_0$ tel que $|f(x)| \neq 0$. L'ensemble

$$\{g \in A, |g(x)| \leq |f(x)|\}$$

est ouvert par continuité de x , donc contient $I_0^n A_0$ pour un entier $n \geq 1$. Soient $g_1, \dots, g_k \in A$ des générateurs de I_0^n . Notons que l'idéal $I_0^n A$ engendré par les g_i dans A est ouvert car il contient I_0^n . Alors x est contenu dans l'ouvert rationnel

$$U = \left\{ y \in \text{Spa}(A, A^+), \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket |g_i(y)| \leq |f(y)| \neq 0 \right\}.$$

La fonction f est non nulle sur U donc inversible dans $\mathcal{O}_X(U)$ (par la proposition 1.3.9 (iii)) et topologiquement nilpotente car appartenant à I_0 ; c'est donc une pseudo-uniformisante de $\mathcal{O}_X(U)$, faisant de ce dernier un anneau de Tate.

Réciproquement, soit $U := U\left(\frac{f_1, \dots, f_k}{g}\right)$ un ouvert rationnel contenant x tel que $\mathcal{O}_X(U)$ soit de Tate, pour une pseudo-uniformisante $f \in \mathcal{O}_X(U)$. Si x est non analytique alors il existe $n \geq 1$ tel que I_0^n soit contenu dans $\text{supp}(x)$. Comme f est topologiquement nilpotente il existe $m \geq 1$ tel que

$$f^m \in I_0^n A_0 \left[\frac{f_i}{g}, 1 \leq i \leq k \right]$$

par définition de la topologie sur $\mathcal{O}_X(U)$. Mais alors on a $|f^m(x)| = 0$ (en voyant x comme une valuation continue sur $\mathcal{O}_X(U)$), ce qui contredit l'inversibilité de f . \square

Définition 1.4.12. Soit X un espace adique. On dit que $x \in X$ est *analytique* si il existe un voisinage ouvert $U \subseteq \text{Spa}(A, A^+)$ contenant x tel que (A, A^+) est une paire de Huber-Tate. On note X_{an} l'ouvert formé des points analytiques de X . On dit que X est un *espace adique analytique* si tous ses points sont analytiques.

On peut caractériser géométriquement les morphismes adiques.

Proposition 1.4.13. Soit $\varphi : (A, A^+) \rightarrow (B, B^+)$ un morphisme entre paires de Huber complètes. Alors φ est un morphisme adique si et seulement si

$$\text{Spa}(\varphi) \left(\text{Spa}(B, B^+)_{\text{an}} \right) \subseteq \text{Spa}(A, A^+)_{\text{an}}.$$

Démonstration. Supposons φ adique. Soit (A_0, I_0) un couple de définition de A et $B_0 \supseteq \varphi(A_0)$ un anneau de définition de B tel que $(B_0, \varphi(I_0)B)$ soit un couple de définition de B . Soit $x \in \text{Spa}(B, B^+)_{\text{an}}$ un point analytique. Comme $\text{Spa}(\varphi)(x) = |\cdot(x)| \circ \varphi$ on a

$$\text{supp}(\text{Spa}(\varphi)(x)) = \varphi^{-1}(\text{supp}(x)).$$

Si cet idéal était ouvert, il contiendrait I_0^k pour un entier $k \geq 1$ donc $\text{supp}(x)$ contiendrait $\varphi(I_0)^k B_0$ et serait ouvert, ce qui contredirait le caractère analytique de x . Donc $\text{Spa}(\varphi(x))$ est analytique. Voir [23, Proposition III.2.5 (iii)] pour la réciproque. \square

Définition 1.4.14. Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme entre espaces adiques. On dit que f est *analytique* ou *adique* si

$$f(X_{\text{an}}) \subseteq Y_{\text{an}}.$$

Lemme 1.4.15. Soit (A, A^+) une paire de Huber-Tate et $x, y \in X = \text{Spa}(A, A^+)$ tels que y soit une spécialisation de x dans X . Alors $\text{supp}(x) = \text{supp}(y)$. Autrement dit, toute généralisation ou spécialisation dans $\text{Spa}(A, A^+)$ est verticale.

Démonstration. Si $\text{supp}(x) \neq \text{supp}(y)$ c'est que $\text{supp}(x) \subsetneq \text{supp}(y)$ car y est une spécialisation de x , par continuité de $\text{supp} : \text{Spa}(A, A^+) \rightarrow \text{Spec}(A)$. Soit $a \in A$ tel que $|a(x)| = 0$ et $|a(y)| \neq 0$ et notons $\omega \in A$ une pseudo-uniformisante de A . Il existe $n \geq 0$ tel que $|\omega^n(y)| \leq |a(y)|$, d'où $y \in X\left(\frac{\omega^n}{a}\right)$. Comme $|a(x)| = 0$, on voit que x n'est pas dans l'ouvert $X\left(\frac{\omega^n}{a}\right)$, ce qui est absurde. \square

Proposition 1.4.16. Soit X un espace adique et $x \in X$ un point analytique. Alors x admet une générisation maximale $\tilde{x} \in X$, qui est un point analytique. La valuation \tilde{x} est de rang 1, a même support que x et la topologie qu'elle induit sur $\kappa(x) = \kappa(\tilde{x})$ est la même que celle induite par x .

Démonstration. Par la définition 1.4.12, on se ramène au cas où $X = \text{Spa}(A, A^+)$ avec (A, A^+) une paire de Huber-Tate. On sait par le lemme 1.4.15 que toute générisation de x dans X est verticale. On note \tilde{x} l'unique générisation verticale de rang 1 de x dans $\text{Spv}(A)$ (remarque 1.1.33). La valuation \tilde{x} est continue par le lemme 1.2.21. Comme \tilde{x} est une générisation de x , on a $|a(\tilde{x})| \leq 1$ dès que $|a(x)| \leq 1$, pour tout $a \in A$, donc $\tilde{x} \in \text{Spa}(A, A^+)$. C'est de plus une générisation maximale de x dans X car la générisation verticale de rang 0 de x dans $\text{Spv}(A)$ n'est pas continue. Comme X est analytique, le point \tilde{x} l'est aussi.

Les points x et \tilde{x} ayant même support, on a $\kappa(x) = \kappa(\tilde{x})$. Montrons que les topologies induites par x et \tilde{x} sur $\kappa(x)$ sont les mêmes. Par définition et pour $y \in \{x, \tilde{x}\}$, les ensembles $\{a \in \kappa(y), |a(y)| < \gamma\}$, pour $\gamma \in \Gamma_y$, forment une base d'ouverts de la topologie induite par y sur $\kappa(y)$. Comme la valuation y n'est pas triviale, il existe pour tout $\gamma \in \Gamma_y$ un élément $\delta \in \Gamma_y$ tel que $\delta < \gamma$. Cela montre que les ensembles $\{a \in \kappa(y), |a(y)| \leq \gamma\}$, pour $\gamma \in \Gamma_y$, forment aussi une base d'ouverts, car on peut écrire

$$\{a \in \kappa(y), |a(y)| \leq \gamma\} = \bigcup_{\substack{\delta \in \Gamma_y \\ \delta < \gamma}} \{a \in \kappa(y), |a(y)| < \delta\}.$$

Soient $V \subseteq V'$ les anneaux de valuation de $\kappa(x)$ correspondant respectivement à x et \tilde{x} . Soient $\gamma \in \kappa(x)^\times$ et $\gamma V^\times \in \Gamma_x = \kappa(x)^\times / V^\times$. On a

$$\{a \in \kappa(x), |a(x)| \leq \gamma\} = \left\{ a \in \kappa(x)^\times, \frac{a}{\gamma} \in V \right\} \cup \{0\}.$$

Comme $V \subseteq V'$, la classe $\gamma(V')^\times \in \kappa(x)^\times / (V')^\times$ est bien définie, ce qui donne l'inclusion

$$\{a \in \kappa(x), |a(x)| \leq \gamma\} \subseteq \{a \in \kappa(x), |a(\tilde{x})| \leq \gamma\}.$$

Réciproquement, on a

$$\left\{ a \in \kappa(x)^\times, \gamma \leq |a(x)| \right\} = \left\{ a \in \kappa(x)^\times, \frac{\gamma}{a} \in V \right\} \subseteq \left\{ a \in \kappa(x)^\times, \gamma \leq |a(\tilde{x})| \right\}$$

donc en passant au complémentaire,

$$\{a \in \kappa(x), |a(\tilde{x})| < \gamma\} \subseteq \{a \in \kappa(x), |a(x)| < \gamma\}.$$

\square

1.4.3 Corps résiduel complété et corps affinoïdes

Définition 1.4.17. Soit X un espace adique et $x \in X$. On note

$$(\kappa(x), \kappa^+(x)) := (\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x, \mathcal{O}_{X,x}^+/\mathfrak{m}_x^+)$$

la paire de Huber constituée du corps résiduel $\kappa(x)$ en x et de l'anneau de valuation ouvert $\kappa^+(x)$ de $\kappa(x)$. Si x n'est pas analytique on munit $\kappa(x)$ de la topologie discrète. Sinon on le munit de la topologie induite par x . Alors $(\kappa(x), \kappa(x)^+)$ est une paire de Huber. On note $(K(x), K(x)^+)$ la complétion de $(\kappa(x), \kappa^+(x))$, appelée le *corps résiduel complété* de x .

Remarque 1.4.18. Soient (A, A^+) une paire de Huber et $X = \text{Spa}(A, A^+)$, tel que \mathcal{O}_X soit un faisceau. Soient $x \in X$ et U un ouvert rationnel de X contenant x . L'espace adique U est isomorphe à $\text{Spa}(\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U))$ et par analogie avec les schémas, on pourrait s'attendre à ce que les corps résiduels de x vu dans X ou dans U soit les mêmes. Notons $y \in \text{Spa}(\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U))$ le point correspondant à x et

$$\varphi : (A, A^+) \rightarrow (\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U))$$

le morphisme de localisation. Par définition, on a $|\cdot(y)| \circ \varphi = |\cdot(x)|$ donc $\text{supp}(x) = \varphi^{-1}(\text{supp}(y))$ et on a une injection $(\kappa(x), \kappa^+(x)) \hookrightarrow (\kappa(y), \kappa^+(y))$, qui n'a pas de raison d'être une égalité en général. Fort heureusement, ce morphisme induit un isomorphisme de paires de Huber lorsque qu'on passe aux corps résiduels complétés; voir par exemple [23, Proposition III.5.1.3] pour les détails.

Si A est un anneau, les points de $\text{Spec}(A)$ sont en bijection avec les classes d'équivalences de morphismes $A \rightarrow K$, pour K un corps. Les corps affinoïdes jouent un rôle similaire pour les points du spectre adique d'une paire de Huber.

Définition 1.4.19. Un *corps affinoïde* est une paire de Huber (K, K^+) où K est un corps non-archimédien ou un corps muni de la topologie discrète, et $K^+ \subseteq K$ est un anneau de valuation ouvert borné.

Remarque 1.4.20. Ainsi, si X est un espace adique, la paire $(K(x), K(x)^+)$ est un corps affinoïde pour tout $x \in X$. Lorsque X est analytique, la proposition 1.4.16 montre que le corps $K(x)$ est non-archimédien pour tout $x \in X$.

Proposition 1.4.21. Soit (A, A^+) une paire de Huber.

- (i) Les points de $\text{Spa}(A, A^+)$ sont en bijection avec les classes d'équivalences de morphismes de paires de Huber

$$(A, A^+) \rightarrow (K, K^+),$$

où (K, K^+) est un corps affinoïde tel que le sous-corps de K engendré par l'image de $A \rightarrow K$ soit dense, et où deux morphismes

$$(K_1, K_1^+) \leftarrow (A, A^+) \rightarrow (K_2, K_2^+)$$

sont équivalents s'il existe un isomorphisme de paires de Huber $(K_1, K_1^+) \xrightarrow{\sim} (K_2, K_2^+)$ compatible avec ces morphismes.

(ii) Explicitement, un point $x \in \text{Spa}(A, A^+)$ correspond au morphisme de paires de Huber

$$(A, A^+) \rightarrow (K(x), K^+(x)),$$

et le morphisme correspondant

$$\text{Spa}(K(x), K^+(x)) \rightarrow \text{Spa}(A, A^+)$$

induit un homéomorphisme entre $\text{Spa}(K(x), K^+(x))$ et l'ensemble des générisations verticales de x dans $\text{Spa}(A, A^+)$.

(iii) Si $x \in \text{Spa}(A, A^+)$ est un point analytique alors les générisations y de x dans $\text{Spa}(A, A^+)$ correspondent aux morphismes

$$(A, A^+) \rightarrow (K(y), K(y)^+)$$

avec $K(y) = K(x)$ et $K(y)^+ \supseteq K(x)^+$.

Remarque 1.4.22. (i) On pourrait vouloir désigner par *point adique* le spectre adique d'un corps affinoïde. On fera néanmoins attention au fait que l'espace topologique sous-jacent à un tel espace affinoïde n'est pas toujours un point, bien que possédant un unique point fermé. En effet, si (K, K^+) est un corps affinoïde, les points de $\text{Spa}(K, K^+)$ sont totalement ordonnés pour la relation de spécialisation, la spécialisation maximale étant le point fermé correspondant à K^+ et la générisation maximale le point générique associé à K° .

(ii) L'analogie adique des points étant clarifié, on peut donner un sens aux fibres d'un morphisme d'espaces adiques $\varphi : Y \rightarrow X$.  tant donné $x \in X$, sa fibre selon φ est (sous réserve d'existence) le produit fibré donné par le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Y \times_X (\text{Spa}(K(x), K^+(x))) & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \text{Spa}(K(x), K^+(x)) & \longrightarrow & X \end{array}$$

Comme $\text{Spa}(K(x), K^+(x))$ peut contenir plus d'un point, la fibre de x ne s'identifie pas à $\varphi^{-1}(x)$ en général.

1.4.4 Exemples

On regarde dans cette section quelques exemples de spectres et d'espaces adiques. On utilisera à chaque fois le cas approprié du théorème 1.3.20.

Droite affine adique au-dessus de \mathbb{Z}

On considère le foncteur associant à un espace adique X ses sections globales $\mathcal{O}_X(X)$. Par la proposition 1.4.4 (ii), se donner un morphisme de $\text{Spa}(\mathbb{Z}[X], \mathbb{Z})$ vers X (où $\mathbb{Z}[X]$ est muni de la topologie discrète), c'est se donner un morphisme de paires de Huber

$$(\mathbb{Z}[X], \mathbb{Z}) \rightarrow (\mathcal{O}_X(X), \mathcal{O}_X^+(X)),$$

c'est-à-dire choisir un élément de $\mathcal{O}_X(X)$. Cela montre que $X \mapsto \mathcal{O}_X(X)$ est représentable par $\text{Spa}(\mathbb{Z}[X], \mathbb{Z})$. On y pense comme à la *droite affine adique* au-dessus de $\text{Spa}(\mathbb{Z})$.

Disque adique fermé au-dessus de \mathbb{Z}

On considère cette fois le foncteur $X \rightarrow \mathcal{O}_X^+(X)$. On regarde la paire $(\mathbb{Z}[X], \mathbb{Z}[X])$ munie de la topologie discrète. Se donner un morphisme de paires de Huber

$$(\mathbb{Z}[X], \mathbb{Z}[X]) \rightarrow (\mathcal{O}_X(X), \mathcal{O}_X^+(X)),$$

revient à choisir une section $f \in \mathcal{O}_X^+(X)$, c'est-à-dire d'une section globale partout bornée par 1. Cela montre que $X \mapsto \mathcal{O}_X^+(X)$ est représentable par $\mathrm{Spa}(\mathbb{Z}[X], \mathbb{Z}[X])$. On peut y penser comme au *disque adique fermé* au-dessus de $\mathrm{Spa}(\mathbb{Z})$.

Disque adique fermé sur un corps non-archimédien

Soit K un corps non-archimédien. On considère $(K\langle T \rangle, K^\circ\langle T \rangle)$ avec sa topologie canonique (voir proposition 1.2.50).

- Soit (L, L^+) une (K, K°) -paire de Huber. Par la propriété universelle de la construction 1.2.48 (v.c), se donner un morphisme $(K\langle T \rangle, K^\circ\langle T \rangle) \rightarrow (L, L^+)$ revient à choisir un élément $a \in L^+$ pour l'image de T . En particulier, si L est la complétion d'une extension algébrique de K , les (L, L°) -points de $\mathrm{Spa}(K\langle T \rangle)$ sont exactement les points du disque fermé unité

$$\{a \in L, |a| \leq 1\}$$

de L . Cela justifie de considérer $\mathrm{Spa}(K\langle T \rangle)$ comme le *disque adique fermé* au-dessus de (K, K°) . On a de plus

$$\mathrm{Spa}(K\langle T \rangle) = \mathrm{Spa}(K) \times_{\mathrm{Spa}(\mathbb{Z})} \mathrm{Spa}(\mathbb{Z}[X], \mathbb{Z}[X])$$

par la proposition 1.4.4 (ii) et la propriété universelle de la construction 1.2.48 (v.c). Ainsi le disque adique fermé sur K s'obtient par changement de base du disque adique fermé sur \mathbb{Z} , ce qui justifie la terminologie.

- Intéressons-nous à l'espace topologique sous-jacent à $\mathrm{Spa}(K\langle T \rangle)$. On suppose dorénavant que K algébriquement clos. On note $|\cdot| : K \rightarrow \mathbb{R}_+$ une valuation de rang 1 définissant la topologie sur K . On peut classifier les points de $\mathrm{Spa}(K\langle T \rangle)$ en 5 types différents :

(Type 1) Soit $\alpha \in K^\circ$. On peut considérer la valuation

$$x_\alpha : (f \in K\langle T \rangle \mapsto |f(\alpha)| \in \mathbb{R}_+).$$

La condition $|\alpha| \leq 1$ assure que x_α est bien définie. On dit que x_α est un *point classique*. Ainsi $\mathrm{Spa}(K\langle T \rangle)$ contient le disque fermé naïf K° de K .

(Type 2,3) Pour $\alpha \in K^\circ$ et $0 < r \leq 1$ un réel, considérons le disque

$$D := D(\alpha, r) = \{\beta \in K^\circ, |\beta - \alpha| \leq r\}.$$

On définit alors la valuation

$$x_D : \left(f = \sum_{n \geq 0} a_n (T - \alpha)^n \in K\langle T \rangle \mapsto \sup_{\beta \in D} |f(\beta)| = \sup_{n \geq 0} |a_n| r^n \in \mathbb{R}_+ \right).$$

Cette définition ne dépend que de D , car $D(\alpha, r) = D(\alpha', r)$ pour tout $\alpha' \in D$. On dit que x_D est un *point de type 2* si $r \in |K^\times|$ et que c'est un *point de type 3* sinon. Lorsque $r = 1$, le point x_D est appelé le *point de Gauss*. La valuation correspondante est

$$x_D := \left(f = \sum_{n \geq 0} a_n T^n \in K\langle T \rangle \mapsto \sup_{n \geq 0} |a_n| \in \mathbb{R}_+ \right).$$

(Type 4) Soit $(D_i)_{i \geq 1}$ une suite décroissante de disques fermés $D_i := D(\alpha_i, r_i)$ pour $\alpha_i \in K^\circ$ et $0 < r_i \leq 1$. On suppose que l'intersection des D_i est vide. On définit alors la valuation

$$x_{(D_i)_{i \geq 1}} : \left(f \mapsto \inf_{i \geq 1} \sup_{\beta_i \in D_i} |f(\beta_i)| = \inf_{i \geq 1} |f(x_{D_i})| \in \mathbb{R}_+ \right).$$

(Type 5) Soit $\alpha \in K^\circ$, $0 < r \leq 1$ un réel et $D = D(\alpha, r)$. Si $r < 1$ on peut définir deux valuations. Considérons le groupe abélien $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{Z}$ muni de l'ordre lexicographique et posons $\gamma_r := (r, 1)$. Ce groupe se note plus suggestivement $\mathbb{R}_+^* \times \gamma_r^{\mathbb{Z}}$, avec une notation multiplicative. En voyant un réel $r' > 0$ comme $r' \cdot 1 \in \mathbb{R}_+^* \times \gamma_r^{\mathbb{Z}}$, on a ainsi $r < \gamma_r < r'$ pour tout réel $r' > r$, donc on peut penser à l'élément γ_r comme étant *infinitésimalement* plus grand que r . On définit les valuations

$$x_{D,+} : \left(f = \sum_{n \geq 0} a_n (T - \alpha)^n \in K\langle T \rangle \mapsto \sup_{n \geq 0} |a_n| \gamma_r^n \in (\mathbb{R}_+^* \times \gamma_r^{\mathbb{Z}}) \cup \{0\} \right)$$

et

$$x_{D,-} : \left(f = \sum_{n \geq 0} a_n (T - \alpha)^n \in K\langle T \rangle \mapsto \sup_{n \geq 0} |a_n| \frac{1}{\gamma_r^n} \in (\mathbb{R}_+^* \times \gamma_r^{\mathbb{Z}}) \cup \{0\} \right)$$

Si $r = 1$, on ne considère que $x_{D,-}$ (car pour l'autre on a $|T(x_{D,+})| > 1$ donc $x_{D,+}$ n'appartient pas à $\text{Spa}(K\langle T \rangle, K^\circ\langle T \rangle)$).

- Tous les points sauf ceux de type 2 sont fermés. L'adhérence du point de Gauss est homéomorphe à la droite affine schématique \mathbb{A}_κ^1 sur le corps résiduel $\kappa := K^\circ/K^{\circ\circ}$ de K . L'adhérence des autres points de type 2 est homéomorphe à la droite projective schématique \mathbb{P}_κ^1 sur κ .
- Si le groupe des valeurs de K est \mathbb{R}_+^* tout entier, il n'y a pas de points de type 3. Par ailleurs, on dit que K est *sphériquement complet* lorsqu'il n'y a pas de points de type 4 ; c'est le cas lorsque K est localement compact par exemple, car alors une intersection de disques fermés est un disque fermé ou un point. On peut montrer que \mathbb{C}_p n'est pas sphériquement complet.
- Topologiquement, on peut visualiser ces points comme un arbre de racine le point de Gauss. Les points classiques forment un segment à l'autre extrémité de l'arbre, reliés par des branches. Monter d'un point classique $\alpha \in K^\circ$ vers le point de Gauss revient à considérer les valuations associées (de type 2,3 ou 5) aux disques fermés dans K de centre α et de rayons croissant.

Les points de type 2 sont les points de branchement, tandis que ceux de type 3 sont les autres points sur les branches. Les points de type 5 sont « collés » autour de ceux de type 2, avec un point pour chaque branche sortant d'un tel point (le signe indiquant si la branche part vers la racine ou un point classique). Les points de type 4 correspondent aux extrémités des branches n'arrivant pas jusqu'aux points classiques, car l'intersection des disques successifs est vide.

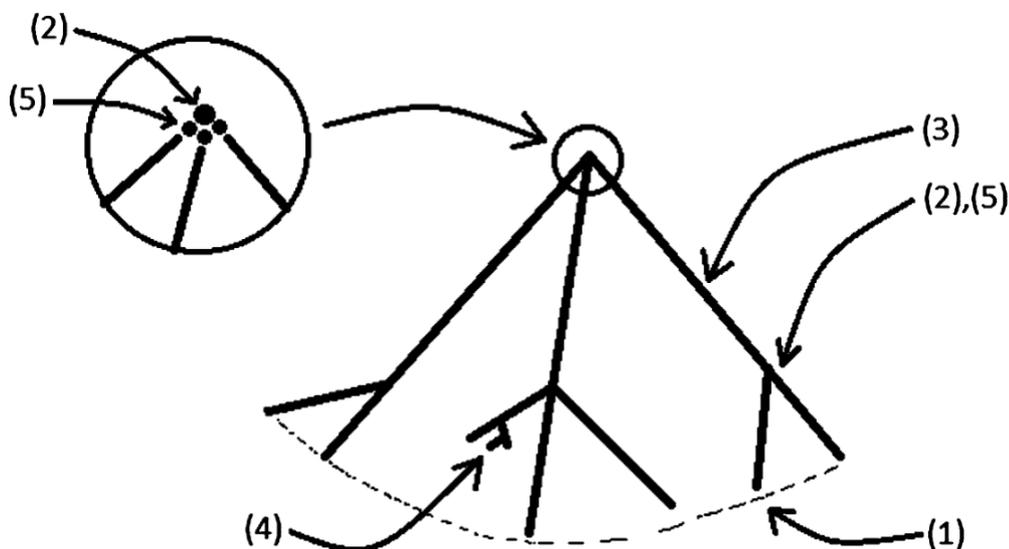


FIGURE 1.1 – Disque adique fermé sur K (tiré de [28, Exemple 2.20])

- Nous renvoyons à [8, Lecture 11] pour une étude très détaillée et générale du disque adique fermé sur un corps non-archimédien quelconque, justifiant notamment la classification des points et la visualisation proposée ci-dessus. L'idée est de commencer par classifier les points de rang 1 en remarquant que leur restriction à K est égale à la valuation $|\cdot| : K \rightarrow \mathbb{R}_+$, puis de s'intéresser à leurs généralisations et spécialisations.

Droite affine adique sur un corps non-archimédien

Le disque adique fermé sur K nous permet de définir la *droite affine adique* sur K . Soit $\omega \in K^\circ$ une pseudo-uniformisante de K . Comme

$$K = \bigcup_{n \geq 0} \omega^{-n} K^\circ,$$

on voit que le changement de base sur K de la droite affine adique sur \mathbb{Z}

$$\mathrm{Spa}(K) \times_{\mathrm{Spa}(\mathbb{Z})} \mathrm{Spa}(\mathbb{Z}[X], \mathbb{Z})$$

est isomorphe au foncteur envoyant une paire de Huber (A, A^+) vers

$$A = \bigcup_{n \geq 0} \omega^{-n} A^+.$$

En considérant les morphismes (adiques) d'inclusions pour $n \geq 0$

$$\left(K \left\langle \frac{T}{\omega^{-(n+1)}} \right\rangle, K^\circ \left\langle \frac{T}{\omega^{-(n+1)}} \right\rangle \right) \longrightarrow \left(K \left\langle \frac{T}{\omega^{-n}} \right\rangle, K^\circ \left\langle \frac{T}{\omega^{-n}} \right\rangle \right)$$

on voit que la droite affine adique sur K est la limite cofiltrante

$$\varprojlim_{n \geq 0} \text{Spa} \left(K \left\langle \frac{T}{\omega^{-n}} \right\rangle, K^\circ \left\langle \frac{T}{\omega^{-n}} \right\rangle \right)$$

qui a naturellement une structure d'espace adique. On peut y penser comme à l'union sur $n \geq 0$ des disques adiques fermés de rayon $|\omega^{-n}|$ sur K .

Disque adique ouvert sur \mathbb{Z}

On considère le foncteur associant à un espace adique X l'ensemble $(\mathcal{O}_X(X))^{\circ\circ}$ de ses sections globales topologiquement nilpotentes. Ce foncteur est représenté par $\text{Spa}(\mathbb{Z}[T], \mathbb{Z}[T])$, où $\mathbb{Z}[T]$ est cette fois muni de la topologie T -adique. C'est aussi le spectre adique de $(\mathbb{Z}[[T]], \mathbb{Z}[[T]])$, en passant à la complétion. On peut donc considérer $\text{Spa}(\mathbb{Z}[T], \mathbb{Z}[T])$ comme le *disque adique ouvert* sur \mathbb{Z} .

Disque adique ouvert sur \mathbb{Z}_p

On s'intéresse à $X = \text{Spa}(\mathbb{Z}_p[[T]], \mathbb{Z}_p[[T]])$, où $\mathbb{Z}_p[[T]]$ est muni de la topologie (p, T) -adique. C'est un espace adique affinoïde par le théorème 1.3.20 (ii), appelé le *disque adique ouvert sur \mathbb{Z}_p* . C'est le changement de base de $\text{Spa}(\mathbb{Z}[T], \mathbb{Z}[T])$ par \mathbb{Z}_p .

Soit $s \in X$ un point non-analytique. On a alors $|p(s)| = 0$ et $|T(s)| = 0$. On en déduit que $s \in \text{Spa}(\mathbb{F}_p)$ est le point fermé donné par la valuation triviale $s : \mathbb{Z}_p[[T]] \rightarrow \mathbb{F}_p \rightarrow \{0, 1\}$. C'est le seul point non-analytique de X . Soit \mathcal{Y} l'espace adique analytique $\mathcal{Y} := X \setminus \{s\}$.

Si $x \in \mathcal{Y}$, on a $|p(x)| \neq 0$ ou $|T(x)| \neq 0$. Cela incite à paramétrer les points de \mathcal{Y} selon l'écart entre les valeurs qu'ils prennent en p et en T . On montre en effet qu'il existe une unique application continue

$$\lambda : |\mathcal{Y}| \rightarrow [0, +\infty]$$

telle que si $r \in [0, +\infty]$ et $x \in \mathcal{Y}$, on a $\lambda(x) = r$ si et seulement si pour tout rationnel $m/n > r$ on a

$$|T(x)|^n \geq |p(x)|^m$$

et pour tout rationnel $m/n < r$ on a

$$|T(x)|^n \leq |p(x)|^m.$$

Cette application est surjective. Si $x \in \mathcal{Y}$ et $\tilde{x} \in \mathcal{Y}$ est sa généralisation maximale de rang 1, on peut la définir par

$$\lambda(x) := \frac{\ln(|T(\tilde{x})|)}{\ln(|p(\tilde{x})|)} \in [0, +\infty].$$

Si I est un intervalle de $[0, +\infty]$, on note \mathcal{Y}_I l'intérieur de $\lambda^{-1}(I)$. C'est un espace adique analytique.

On peut notamment considérer l'espace adique analytique $\mathcal{Y}_{]0, +\infty[}$, qu'on peut voir comme la *fibre générique* de X sur \mathbb{Z}_p , c'est-à-dire (dans ce cas, voir la remarque 1.4.22) l'image réciproque du point générique $\eta_p \in \text{Spa}(\mathbb{Z}_p)$ par le morphisme structural $X \rightarrow \text{Spa}(\mathbb{Z}_p)$. Comme l'application λ est continue, l'espace $\mathcal{Y}_{]0, +\infty[}$ n'est pas quasi-compact car sinon son image serait un intervalle compact de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. La fibre générique de l'espace adique affinoïde X n'est donc pas affinoïde.

Chapitre 2

Géométrie perfectoïde

Le formalisme des espaces adiques sera utilisé dans ce chapitre pour introduire les *espaces perfectoïdes* et développer leurs propriétés de base.

Nous commencerons par définir les *anneaux perfectoïdes* (qui seront une généralisation des corps perfectoïdes considérés dans la thèse de Scholze) et par étudier plusieurs variations autour des différentes conditions en jeu.

La section 2.2 sera consacrée au *basculement* d'anneaux perfectoïdes, qui sera la construction fondamentale permettant de transformer un anneau perfectoïde de caractéristique quelconque en un anneau perfectoïde de caractéristique p . Le basculement induira une équivalence de catégories entre les algèbres perfectoïdes sur un anneau perfectoïde A et celles sur son basculé A^\flat . En utilisant les vecteurs de Witt (dont la définition et les propriétés sont exposées dans la section A.4 de l'annexe), nous définirons un foncteur de *débasculement*, qui sera un quasi-inverse au foncteur de basculement. Une paire perfectoïde (A, A^+) de caractéristique p n'admettra pas un unique débasculé en général, ces derniers étant paramétrisés par certains *idéaux primitifs de degré 1* de l'anneau $W(A^+)$ des vecteurs de Witt à coefficients dans A^+ . Nous finirons cette section par quelques énoncés qui nous permettront de géométriser le basculement aux spectres adiques d'anneaux perfectoïdes.

Nous introduirons le langage des *presque mathématiques* dans la section suivante. Étant donné une paire perfectoïde (A, A^+) , l'idée sera de considérer les A^+ -modules à A° -torsion près. Formellement, cela correspondra à localiser la catégorie abélienne des A^+ -modules par la sous-catégorie de Serre constituée des A^+ -modules M *presque nuls*, i.e. vérifiant $A^\circ M = 0$. Nous utiliserons ce formalisme pour décrire à *presque isomorphisme près* les sections rationnelles du préfaisceau associé au spectre adique d'une paire perfectoïde. Cela permettra de montrer que les anneaux perfectoïdes sont *stablement uniformes* et donc de munir leur spectre adique d'une structure d'espace adique affinoïde.

Enfin, nous construirons les espaces perfectoïdes comme recollements de spectres adiques d'anneaux perfectoïdes. Le basculement se géométrisera, donnant un homéomorphisme sur les espaces topologiques sous-jacents en dépit du basculement au niveau du faisceau de fonctions. Nous terminerons le chapitre en relâchant le ton pour énoncer de façon imprécise (et sans aucune démonstration) les résultats portant sur la comparaison de la cohomologie étale d'un espace perfectoïde avec celle de son basculé.

2.1 Anneaux perfectoides

Rappelons que p désigne un nombre premier fixé. Si A est un anneau de caractéristique p , on note

$$\Phi : A \rightarrow A, \quad x \mapsto x^p$$

l'endomorphisme de Frobenius. On dit que A est *parfait* si Φ est un automorphisme d'anneaux. Nous conseillons de relire le lemme 1.2.32 qui sera plusieurs fois utilisé implicitement dans ce qui suit.

Définition 2.1.1. Un anneau A est dit *perfectoïde* si c'est un anneau de Tate complet uniforme et si il existe une pseudo-uniformisante $\omega \in A^\circ$ de A telle que ω^p divise p dans A° et que le morphisme d'anneaux

$$\Phi : A^\circ/\omega \rightarrow A^\circ/\omega^p, \quad x \mapsto x^p$$

est un isomorphisme.

Lemme 2.1.2. Soit A un anneau de Tate complet et A^+ un sous-anneau d'éléments entiers. On suppose qu'il existe une pseudo-uniformisante $\omega \in A^+$ de A telle que ω^p divise p dans A^+ . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Le morphisme d'anneaux

$$\Phi : A^+/\omega \rightarrow A^+/\omega^p, \quad x \mapsto x^p$$

est un isomorphisme ;

(ii) L'endomorphisme de Frobenius

$$\Phi : A^+/p \rightarrow A^+/p, \quad x \mapsto x^p$$

est surjectif.

Démonstration. Montrons d'abord qu'avec les hypothèses de l'énoncé, le morphisme

$$\Phi : A^+/\omega \rightarrow A^+/\omega^p, \quad x \mapsto x^p$$

est toujours injectif. Soit $x \in A^+$ tel que $\Phi(x \bmod \omega) = 0$. Il existe $y \in A^+$ tel que $x^p = \omega^p y$, d'où $(x/\omega)^p \in A^+$, puis $x/\omega \in A^+$ car A^+ est intégralement clos dans A .

Ensuite, comme ω^p et donc ω divisent p dans A^+ , on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 & A^+ & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 A^+/p & \xrightarrow{\Phi} & A^+/p \\
 \swarrow & & \searrow \\
 A^+/\omega & \xrightarrow{\Phi} & A^+/\omega^p
 \end{array}$$

où les flèches non nommées sont surjectives et induites par les applications quotients. Il est alors clair que $\Phi : A^+/\omega \rightarrow A^+/\omega^p$ est surjective si $\Phi : A^+/p \rightarrow A^+/p$ l'est ; cela montre que (ii) implique (i).

Supposons (i). Soit $x \in A^+$. Par surjectivité de $\Phi : A^+/\omega \rightarrow A^+/\omega^p$, il existe $x_0 \in A^+$ tel que $x = x_0^p + y\omega^p$ pour un certain $y \in A^+$. En raisonnant par récurrence, on trouve pour tous $n \geq 0$ un élément $x_n \in A^+$ tel que

$$x - (x_0^p + x_1^p\omega^p + x_2^p\omega^{2p} + \cdots + x_n^p\omega^{np}) \in \omega^{p^{n+1}}A^+.$$

Ainsi, par complétude on obtient

$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k^p \omega^{kp} \in A^+.$$

Comme ω divise p dans A^+ , on a en développant le produit

$$x - \left(\sum_{k=0}^{+\infty} x_k \omega^k \right)^p \in pA^+,$$

ce qui montre (ii). □

Remarque 2.1.3. Le lemme suivant montre qu'un anneau est perfectoïde lorsque les conditions de la définition 2.1.1 sont vérifiées au niveau d'un anneau de définition intégralement clos. On pourrait ainsi développer toute la théorie en raisonnant uniquement sur de tels anneaux, appelés *integral perfectoid* dans la littérature; c'est par exemple l'approche utilisée dans les notes de cours de Morrow [24].

Lemme 2.1.4. Soient A un anneau de Tate complet, A^+ un anneau de définition intégralement clos de A et $\omega \in A^+$ une pseudo-uniformisante de A . On suppose que $p \in \omega^p A^+$ et que le Frobenius

$$\Phi : A^+/\omega \rightarrow A^+/\omega^p$$

est un isomorphisme d'anneaux. Alors la paire (A, A^+) est perfectoïde.

Démonstration. Le lemme 1.2.32 montre que A est uniforme. Ensuite, on peut supposer que ω admet une racine p -ième dans A^+ . En effet, le Frobenius $\Phi : A^+/\omega \rightarrow A^+/\omega^p$ est surjectif donc il existe $\omega' \in A^+$ et $a \in A^+$ tels que

$$(\omega')^p = \omega + \omega^p a = \omega(1 + \omega^{p-1}a).$$

Comme $\omega^{p-1}a \in A^+$ est topologiquement nilpotent, l'élément $b := 1 + \omega^{p-1}a$ est inversible dans A^+ (car A^+ est complet), ce qui fait qu'on peut remplacer ω par $b\omega = (\omega')^p$.

Par la définition 2.1.1 appliquée avec $\omega^{1/p}$, on doit montrer que le Frobenius

$$\Phi : A^\circ/\omega^{1/p} \rightarrow A^\circ/\omega$$

est un isomorphisme d'anneaux. Le début de la démonstration du lemme 2.1.2 montre que c'est une injection.

Soit $f \in A^\circ$. On a $\omega f \in A^{\circ\circ} \subseteq A^+$ donc par la surjectivité de $\Phi : A^+/\omega \rightarrow A^+/\omega^p$, il existe $y, z \in A^+$ tels que $y^p = \omega f + \omega^p z$. On a alors

$$\left(y\omega^{-\frac{1}{p}} \right)^p = f + \omega^{p-1}z,$$

donc $\left(y\omega^{-\frac{1}{p}} \right)^p \in A^\circ$ ce qui donne $y\omega^{-\frac{1}{p}} \in A^\circ$. Comme $\omega^{p-1}z \in \omega A^\circ$, cela montre que f est une puissance p -ième modulo ωA° , donc la surjectivité de $\Phi : A^\circ/\omega^{1/p} \rightarrow A^\circ/\omega$. Cela permet de conclure. □

La proposition ci-dessous éclaire la terminologie.

Proposition 2.1.5. Soit A un anneau de Tate complet de caractéristique p . Alors A est un anneau perfectoïde si et seulement si A est parfait.

Démonstration. Supposons que A est perfectoïde. Comme A est de caractéristique p on a $A^\circ/p = A^\circ$ donc le Frobenius $\Phi : A^\circ \rightarrow A^\circ$ est surjectif par le lemme 2.1.2. Comme A est un anneau de Tate uniforme, il est le localisé de A° en une pseudo-uniformisante donc le Frobenius $\Phi : A \rightarrow A$ est surjectif. Par ailleurs le lemme 1.2.33 montre que A est un anneau réduit, et donc en particulier que le Frobenius $\Phi : A \rightarrow A$ est injectif. Cela montre que A est parfait.

Supposons A parfait. D'après le lemme 2.1.2, il suffit de montrer que A est uniforme. Soit A_0 un sous-anneau de définition. Pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, le théorème 1.4.8 appliqué à $\Phi^k : A \rightarrow A$ (où le A d'arrivée a la structure de A -module induite par Φ^k) montre que le sous-anneau $\Phi^k(A_0)$ est ouvert. En particulier, il existe $\omega \in A_0$ une pseudo-uniformisante de A telle que $\omega A_0 \subseteq \Phi(A_0)$, d'où $\omega^{1/p} \Phi^{-1}(A_0) \subseteq A_0$. On a alors

$$\omega^{\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}} \Phi^{-2}(A_0) = \omega^{\frac{1}{p}} \Phi^{-1} \left(\omega^{\frac{1}{p}} \Phi^{-1}(A_0) \right) \subseteq A_0$$

puis pour tout entier $n \geq 0$,

$$\omega^{\frac{1}{p^n} + \dots + \frac{1}{p}} \Phi^{-n}(A_0) \subseteq A_0.$$

On en déduit que, pour tout $n \geq 0$,

$$\omega \Phi^{-n}(A_0) \subseteq A_0.$$

En effet, si $x \in \Phi^{-n}(A_0)$ alors

$$\omega x = \omega^{\frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p^n}} \underbrace{\omega^{1 - (\frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p^n})}}_{\in \Phi^{-n}(A_0)} x \in A_0,$$

où $\omega^{1 - (\frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p^n})} \in \Phi^{-n}(A_0)$ car

$$p^n \left[1 - \left(\frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p^n} \right) \right] = p^n - (1 + p + \dots + p^{n-1})$$

est un entier positif. Le sous-anneau parfait

$$A_0^{1/p^\infty} := \bigcup_{n \geq 0} \Phi^{-n}(A_0) \subseteq \omega^{-1} A_0$$

est ainsi ouvert et borné, donc c'est un anneau de définition de A . On alors $A^{\circ\circ} \subseteq A_0^{1/p^\infty}$. Si $x \in A^\circ$, on a $\omega x \in A^{\circ\circ} \subseteq A_0^{1/p^\infty}$ par la proposition 1.2.12 (ii), d'où $A^\circ \subseteq \omega^{-1} A_0^{1/p^\infty}$ et A° est donc borné. \square

Définition 2.1.6. Un *corps perfectoïde* est un corps non-archimédien qui est un anneau perfectoïde.

Remarque 2.1.7. Il serait naturel de définir un corps perfectoïde comme un anneau perfectoïde qui est un corps. Il est assez difficile de montrer qu'une telle définition coïncide avec celle ci-dessus, voir [19, Theorem 2.9.1].

Proposition 2.1.8. Soit K un corps non-archimédien ; on note $|\cdot| : K \rightarrow \mathbb{R}_+$ sa valuation de rang 1 et \mathcal{O}_K son anneau des entiers. Alors K est un corps perfectoïde si et seulement si les conditions ci-dessous sont toutes vérifiées :

- (i) La valuation $|\cdot|$ n'est pas d'image discrète dans \mathbb{R}_+ .
- (ii) $|p| < 1$.
- (iii) L'endomorphisme de Frobenius

$$\Phi : \mathcal{O}_K/p \rightarrow \mathcal{O}_K/p, \quad x \mapsto x^p$$

est surjectif.

Démonstration. Comme K est un corps non-archimédien on a $K^\circ = \mathcal{O}_K$. Supposons que K est un corps perfectoïde. Alors (iii) est vérifiée par le lemme 2.1.2. Soit $\omega \in \mathcal{O}_K$ une pseudo-uniformisante ; on a $|\omega| < 1$. Comme ω^p divise p dans \mathcal{O}_K cela donne $|p| < 1$. On a $|p| < |\omega| < 1$ et par surjectivité du Frobenius, il existe $x, z \in \mathcal{O}_K$ tel que $\omega = x^p + pz$, d'où $|\omega| = |x|^p$ par l'inégalité ultramétrique, et on a encore $|p| < |x| < 1$. En répétant l'argument on trouve pour tout entier $n \geq 1$ un élément $x_n \in \mathcal{O}_K$ tel que $|x_n| = |\omega|^{1/p^n}$. Comme la suite $(|\omega|^{1/p^n})_{n \geq 1}$ tend vers 1, cela montre que $|\cdot|$ n'est pas d'image discrète.

Réciproquement, supposons (i), (ii) et (iii). Il reste seulement à trouver une pseudo-uniformisante ω tel que ω^p divise p dans \mathcal{O}_K . Comme la valuation n'est pas discrète, on peut trouver $\omega \in K^\times$ tel que $|\omega|^p \leq |p|$, dont on déduit $|\omega| < 1$ et $\omega \in \mathcal{O}_K$ est donc une pseudo-uniformisante. Comme $|p\omega^{-p}| \leq 1$ on a $p\omega^{-p} \in \mathcal{O}_K$ donc ω^p divise p dans \mathcal{O}_K . \square

Remarque 2.1.9. On trouvera dans [19, Remark 2.1.8] un historique détaillé de la notion d'anneau et de corps perfectoïdes.

Exemple 2.1.10. (i) Une extension finie de \mathbb{Q}_p n'est jamais un corps perfectoïde car la valuation est d'image discrète. Pour la même raison, la complétion de l'extension maximale non-ramifiée de \mathbb{Q}_p n'est pas perfectoïde.

- (ii) Tout corps non archimédien algébriquement clos est perfectoïde ; c'est en particulier le cas de \mathbb{C}_p .
- (iii) Un corps non archimédien de caractéristique p est perfectoïde si et seulement si il est parfait par la proposition 2.1.5. Ainsi, si k/\mathbb{F}_p est un corps parfait, on note $k((T^{1/p^\infty}))$ le corps perfectoïde obtenu comme la complétion de la clôture parfaite de $k((T))$, c'est-à-dire la complétion de l'extension

$$\bigcup_{n \geq 0} k((T)) [T^{1/p^n}].$$

On remarquera aussi que si K est un corps perfectoïde de caractéristique p de corps résiduel k alors K est une extension de $k((t^{1/p^\infty}))$, pour tout $t \in K$ vérifiant $0 < |t| < 1$.

- (iv) On note $\mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty})$ le corps perfectoïde obtenu comme complétion de l'union des extensions ramifiées

$$\bigcup_{n \geq 0} \mathbb{Q}_p[p^{1/p^n}]$$

de \mathbb{Q}_p , où $(p^{1/p^n})_{n \geq 0}$ est une suite de racines p^n -ièmes de p , telle que

$$(p^{1/p^{n+1}})^p = p^{1/p^n}$$

pour tout $n \geq 0$. C'est un corps non-archimédien, dont le groupe des valeurs de la valuation est $\mathbb{Z}[1/p]$ et de corps résiduel \mathbb{F}_p , sur lequel le Frobenius est surjectif. En notant $\mathbb{Z}_p[p^{1/p^\infty}] := (\mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty}))^\circ$, on peut par exemple prendre $\omega = p^{1/p}$ comme pseudo-uniformisante vérifiant $p \in \omega^p \mathbb{Z}_p[p^{1/p^\infty}]$.

(v) On note $\mathbb{Q}_p^{\text{cycl}}$ la complétion de l'extension

$$\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty}) := \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{Q}_p[\mu_{p^n}],$$

où $(\mu_{p^n})_{n \geq 0}$ est une suite de racines primitives p^n -ième de l'unité, telle que

$$(\mu_{p^{n+1}})^p = \mu_{p^n}$$

pour tout $n \geq 0$. C'est un corps non-archimédien. Pour $n \geq 1$, le polynôme minimal de μ_{p^n} sur \mathbb{Q}_p est le p^n -ième polynôme cyclotomique

$$\Phi_{p^n}(X) = \sum_{k=0}^{p-1} X^{kp^{n-1}}.$$

Ainsi la norme de $\mu_{p^n} - 1$ sur \mathbb{Q}_p est $N_{\mathbb{Q}_p(\mu_{p^n})/\mathbb{Q}_p}(\mu_{p^n} - 1) = p$ donc

$$|\mu_{p^n} - 1|^{p^{n-1}(p-1)} = |p|.$$

On en déduit que la valuation sur $\mathbb{Q}_p^{\text{cycl}}$ n'est pas d'image discrète. On note $\mathbb{Z}_p^{\text{cycl}}$ l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}_p^{\text{cycl}}$. C'est la complétion de l'union sur $n \geq 0$ des $\mathbb{Z}_p[\mu_{p^n}]$. Pour $\bar{x} \in \mathbb{Z}_p^{\text{cycl}}/p$, il existe $n \geq 0$ et $x \in \mathbb{Z}_p[\mu_{p^n}]$ d'image \bar{x} modulo p . Comme $\mathbb{Z}_p[\mu_{p^n}]$ est un \mathbb{Z}_p -module libre de base $(1, \mu_{p^n}, \dots, (\mu_{p^n})^{p^n-1})$, il existe $a_0, \dots, a_{p^n-1} \in \mathbb{Z}_p$ tels que

$$x = \sum_{k=0}^{p^n-1} a_k (\mu_{p^n})^k = \sum_{k=0}^{p^n-1} a_k (\mu_{p^{n+1}}^p)^k.$$

En posant

$$y := \sum_{k=0}^{p^n-1} a_k (\mu_{p^{n+1}})^k \in \mathbb{Z}_p[\mu_{p^{n+1}}] \subseteq \mathbb{Z}_p^{\text{cycl}},$$

on a $y^p = x$ modulo p . Cela montre que le Frobenius $\Phi : \mathbb{Z}_p^{\text{cycl}}/p \rightarrow \mathbb{Z}_p^{\text{cycl}}/p$ est surjectif, et donc que $\mathbb{Q}_p^{\text{cycl}}$ est un corps perfectoïde.

(vi) On pourra trouver en [30, Exemple 6.1.5 (4)] ou en [19, Exercice 2.4.8] des exemples d'anneaux perfectoïdes n'étant pas des algèbres sur un corps perfectoïde.

Proposition 2.1.11. Soient (K, K^+) une paire perfectoïde avec K un corps perfectoïde, et $\omega \in K^+$ une pseudo-uniformisante de K . On note

$$K^+ \langle X^{1/p^\infty} \rangle$$

la complétion de l'anneau

$$\bigcup_{m \geq 0} K^+ [X^{1/p^m}].$$

On pose alors

$$K \langle X^{1/p^\infty} \rangle := K^+ \langle X^{1/p^\infty} \rangle \left[\frac{1}{\omega} \right]$$

qui ne dépend pas du choix de ω . Alors

$$\left(K \langle X^{1/p^\infty} \rangle, K^+ \langle X^{1/p^\infty} \rangle \right)$$

est une paire perfectoïde dont l'anneau des éléments à puissances bornées est

$$\left(K \langle X^{1/p^\infty} \rangle \right)^\circ = K^\circ \langle X^{1/p^\infty} \rangle.$$

Démonstration. Le point le moins immédiat est la description des éléments à puissances bornées, qui permet de montrer que l'anneau est uniforme. Cela se fait néanmoins sans difficultés car la topologie est induite par une valuation de rang 1. On renvoie à [23, Proposition V.1.2.8] pour une démonstration. \square

Remarque 2.1.12. On généralisera cet énoncé au cas d'une paire perfectoïde (A, A^+) quelconque dans le corollaire 2.3.11. On n'aura cependant qu'un *presque isomorphisme* au niveau de l'anneau des éléments à puissances bornées.

Le lemme ci-dessous servira dans la démonstration du théorème 2.4.1.

Lemme 2.1.13. Soit A un anneau de Tate de caractéristique p ayant un anneau de définition parfait. Alors A et \hat{A} sont parfaits.

Démonstration. Soient A_0 un anneau de définition parfait de A et $\omega \in A_0$ une pseudo-uniformisante de A . Alors $\omega^{1/p} \in A_0$ est aussi une pseudo-uniformisante de A et on a

$$A = A_0 \left[\frac{1}{\omega} \right] = A_0 \left[\frac{1}{\omega^{1/p}} \right]$$

par la proposition 1.2.29 (i). Soit $a = \frac{a_0}{\omega^k} \in A$ avec $a_0 \in A_0$ et $k \geq 0$. Il existe $b_0 \in A_0$ tel que $a_0 = (b_0)^p$, d'où $a = \left(\frac{b_0}{\omega^{k/p}} \right)^p$. Par ailleurs, si $a^p = 0$ alors il existe $l \geq 0$ tel que

$$0 = \omega^l a = a_0 \omega^{l-k} = \left(b_0 \omega^{(l-k)/p} \right)^p.$$

Comme A_0 est parfait, on a $b_0 \omega^{(l-k)/p} = 0$ donc $a = 0$. Cela montre que A est parfait.

Comme \hat{A}_0 est un anneau de définition de \hat{A} par la construction 1.2.38 (i), il suffit par ce qui précède de montrer que \hat{A}_0 est parfait. C'est une conséquence de l'isomorphisme d'anneaux

$$\hat{A}_0 = \varprojlim_{n \geq 1} A_0 / (\omega^{1/p})^n \xrightarrow{\simeq} \varprojlim_{n \geq 1} A_0 / \omega^n = \hat{A}_0, \quad (x_n)_{n \geq 1} \mapsto (x_n^p)_{n \geq 1}.$$

\square

2.2 Basculement d'anneaux perfectoides

2.2.1 Basculé

Lemme 2.2.1. Soient A un anneau perfectoïde et $\omega \in A^\circ$ une pseudo-uniformisante de A telle que $p \in \omega^p A^\circ$. Les applications induites par les projections

$$\varprojlim_{\Phi} A^\circ \rightarrow \varprojlim_{\Phi} A^\circ / \omega p \rightarrow \varprojlim_{\Phi} A^\circ / p \rightarrow \varprojlim_{\Phi} A^\circ / \omega^p \rightarrow \varprojlim_{\Phi} A^\circ / \omega$$

sont toutes des isomorphismes de monoïdes topologiques (pour la multiplication), où les limites sont indexées par \mathbb{N} et avec $\Phi : x \mapsto x^p$ le Frobenius.

Démonstration. On construit uniquement un inverse continu de la flèche $\varprojlim_{\Phi} A^\circ \rightarrow \varprojlim_{\Phi} A^\circ / \omega$, les autres cas se traitant de façon similaire.

Définissons tout d'abord un morphisme $\alpha : \varprojlim_{\Phi} A^\circ / \omega \rightarrow A^\circ$ tel que pour tout $(\overline{x_n})_{n \geq 0} \in \varprojlim_{\Phi} A^\circ / \omega$ on ait

$$\alpha \left((\overline{x_n})_{n \geq 0} \right) = \overline{x_0} \bmod \omega A^\circ. \quad (2.1)$$

Soient $(\overline{x_n})_{n \geq 0} \in \varprojlim_{\Phi} A^\circ / \omega$ et considérons $x_n \in A^\circ$ un relevé de $\overline{x_n} \in A^\circ / \omega$, pour tout $n \geq 0$. Montrons que la suite $(x_n^{p^n})_{n \geq 0}$ converge dans A° et que sa limite ne dépend pas du choix des x_n . Pour tout $n \geq 0$ on a $x_{n+1}^p - x_n \in \omega A^\circ$ par définition, donc

$$x_{n+1}^{p^2} - x_n^p = \left(x_n + \underbrace{(x_{n+1}^p - x_n)}_{\in \omega A^\circ} \right)^p - x_n^p \in \omega^2 A^\circ$$

par la formule du binôme et car ω divise p . En répétant l'argument on obtient

$$x_{n+1}^{p^{n+1}} - x_n^{p^n} \in \omega^{n+1} A^\circ.$$

La suite considérée est donc de Cauchy donc converge dans A° . Pour tout $n \geq 0$ soit $x'_n \in A^\circ$ un autre relevé de $\overline{x_n}$. On a alors $x_n - x'_n \in \omega A^\circ$ par définition, donc comme précédemment

$$x_n^{p^n} - (x'_n)^{p^n} \in \omega^{n+1} A^\circ.$$

Cela montre que

$$\alpha \left((\overline{x_n})_{n \geq 0} \right) := \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^{p^n} \in A^\circ$$

est bien défini. Il est clair que c'est une application multiplicative. Si $a \in A^\circ$ et $k \geq 0$ on a

$$\begin{aligned} \alpha^{-1}(a + \omega^k A^\circ) &= \left\{ (\overline{x_n})_{n \geq 0}, \exists m \geq 0, \forall n \geq m, x_n^{p^n} \in a + \omega^k A^\circ \right\} \\ &= \left\{ (\overline{x_n})_{n \geq 0}, \overline{x_0} \in \overline{a} + \overline{\omega^k} A^\circ / \omega \right\} \end{aligned}$$

où x_n est un relevé de $\overline{x_n}$ et car $a + \omega^k A^\circ$ est ouvert, donc α est continue.

On pose alors

$$\sigma : \varprojlim_{\Phi} A^\circ / \omega \rightarrow \varprojlim_{\Phi} A^\circ, (\overline{x_n})_{n \geq 0} \mapsto \left(\alpha \left((\overline{x_n})_{n \geq k} \right) \right)_{k \geq 0}.$$

Comme $(\overline{x_{k+1}^p}, \overline{x_{k+2}^p}, \dots) = (\overline{x_k}, \overline{x_{k+1}}, \dots)$ pour $(\overline{x_n})_{n \geq 0} \in \varprojlim_{\Phi} A^\circ / \omega$, il est clair que σ est bien définie. C'est une application multiplicative et continue car α l'est, et l'équation (2.1) montre que σ est un inverse de l'application $\varprojlim_{\Phi} A^\circ \rightarrow \varprojlim_{\Phi} A^\circ / \omega$ induite par la projection. \square

Construction 2.2.2. Soit A un anneau perfectoïde.

(i) On note A^b le *monoïde topologique* (pour la multiplication)

$$A^b := \varprojlim_{\Phi} A = \left\{ (x_n)_{n \geq 0} \in A^{\mathbb{N}}, \forall n \geq 0, x_{n+1}^p = x_n \right\}$$

où la limite est prise sur \mathbb{N} et Φ est le Frobenius. On le munit d'une addition en posant

$$(x_n)_{n \geq 0} + (y_n)_{n \geq 0} := \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} (x_{n+k} + y_{n+k})^{p^k} \right)_{n \geq 0} \in A^b$$

pour $(x_n)_{n \geq 0}, (y_n)_{n \geq 0} \in A^b$. Muni de ces lois, A^b est un anneau perfectoïde de caractéristique p , appelé le *basculé* de A . Le basculement $A \mapsto A^b$ induit un foncteur de la catégorie des anneaux perfectoïdes vers la catégorie des anneaux perfectoïdes de caractéristique p .

(ii) Si $\omega' \in A^\circ$ est une pseudo-uniformisante de A telle que $p \in (\omega')^p A^\circ$, on a l'égalité

$$(A^b)^\circ = \varprojlim_{\Phi} A^\circ$$

et les applications induites par les projections induisent des isomorphismes d'anneaux topologiques

$$\varprojlim_{\Phi} A^\circ \xrightarrow{\simeq} \varprojlim_{\Phi} A^\circ/p \xrightarrow{\simeq} \varprojlim_{\Phi} A^\circ/\omega'.$$

(iii) On note

$$(\cdot)^\sharp : A^b \rightarrow A, \quad (x_n)_{n \geq 0} \mapsto x_0$$

la projection d'indice 0, appelée application de *débasculement*. C'est une application multiplicative continue. Alors il existe une pseudo-uniformisante $\omega \in A$ tel que ω^p divise p dans A° et étant dans l'image de $(\cdot)^\sharp : A^b \rightarrow A$. Si $\omega^b \in A^b$ est tel que $(\omega^b)^\sharp = \omega$ alors ω^b est une pseudo-uniformisante de A^b , le débasculement induit un isomorphisme d'anneaux (topologiques discrets)

$$A^{b^\circ}/\omega^b \xrightarrow{\simeq} A^\circ/\omega$$

et on a

$$A^b = A^{b^\circ} \left[\frac{1}{\omega^b} \right].$$

(iv) Plus précisément, l'application

$$A^+ \mapsto A^{b^+} := \varprojlim_{\Phi} A^+$$

établit une bijection croissante (pour l'inclusion) entre l'ensemble des sous-anneaux d'éléments entiers de A et l'ensemble des sous-anneaux d'éléments entiers de A^b . De plus, si $A^+ \subseteq A^\circ$ est un tel sous-anneau, l'isomorphisme du (iii) induit un isomorphisme d'anneaux

$$A^{b^+}/\omega^b \xrightarrow{\simeq} A^+/\omega.$$

Démonstration. On raisonne d'abord sur $A^{\circ b} := \varprojlim_{\Phi} A^\circ$ puis on procède par localisation.

- Un raisonnement similaire à celui fait dans la démonstration du lemme 2.2.1 montre que l'addition est bien définie sur A^{ob} . Montrons que les isomorphismes de monoïdes topologiques du lemme 2.2.1 sont compatibles avec l'addition sur A^{ob} . On le montre seulement pour $\varprojlim_{\Phi} A^{\circ} \rightarrow \varprojlim_{\Phi} A^{\circ}/\omega'$, les arguments pour les autres flèches étant semblables. Soient $(x_n)_{n \geq 0}, (y_n)_{n \geq 0} \in A^{\text{ob}}$ et

$$(z_n)_{n \geq 0} := (x_n)_{n \geq 0} + (y_n)_{n \geq 0} \in A^{\text{ob}}.$$

Il suffit de remarquer que pour tout $n \geq 0$ on a

$$z_n = x_n + y_n \pmod{\omega' A^{\circ}}$$

car A°/ω' est de caractéristique p . Ainsi, A^{ob} est un anneau topologique de caractéristique p par transport de structure.

- Montrons qu'il existe une pseudo-uniformisante $\omega \in A$ tel que $p \in \omega^p A^{\circ}$ et admettant un antécédent selon l'application de débasculement (autrement dit, possédant une suite compatible de racines p -ièmes dans A°). Comme

$$A^{\text{ob}} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{\Phi} A^{\circ}/\omega'^p,$$

un antécédent de $\omega' \pmod{\omega'^p A^{\circ}}$ pour la projection d'indice 0

$$\varprojlim_{\Phi} A^{\circ}/\omega'^p \rightarrow A^{\circ}/\omega'^p$$

nous fournirait un élément $\omega^{\flat} = (\omega_n)_{n \geq 0} \in A^{\text{ob}}$ tel que

$$\omega_0 = \omega' \pmod{\omega'^p A^{\circ}}.$$

Un tel élément existe par surjectivité de

$$\Phi : A^{\circ}/\omega' \rightarrow A^{\circ}/\omega'^p, \quad x \mapsto x^p,$$

car A est perfectoïde. On pose alors $\omega := \omega_0$. Par définition, il existe $a \in A^{\circ}$ tel que $\omega = \omega'(1 + a(\omega')^p)$. Comme $a(\omega')^p$ est topologiquement nilpotent, $1 + a(\omega')^p$ est inversible dans A° donc ω est une pseudo-uniformisante de A .

- Notons que comme ω est inversible dans A , tous les ω_n le sont aussi, et ω^{\flat} est alors inversible dans A^{\flat} d'inverse $(\omega_n^{-1})_{n \geq 0} \in A^{\flat}$.
- Montrons que la topologie sur A^{ob} est la topologie ω^{\flat} -adique; en particulier, ω^{\flat} sera topologiquement nilpotent. Pour tout $n \geq 0$ on note $\pi_n : A^{\text{ob}} \rightarrow A^{\circ}/\omega$ la projection d'indice n . Une base de voisinages de 0 est donnée par les $\ker(\pi_n)$. En notant

$$\Phi : A^{\text{ob}} \rightarrow A^{\text{ob}}, \quad (x_n)_{n \geq 0} \mapsto (x_n^p)_{n \geq 0} = (x_0^p, x_0, x_1, \dots)$$

l'automorphisme de Frobenius (d'inverse $(x_n)_{n \geq 0} \mapsto (x_{n+1})_{n \geq 0}$), on a

$$\ker(\pi_n) = \Phi^n(\ker(\pi_0)) = \Phi^n(\omega^{\flat} A^{\text{ob}}) = (\omega^{\flat})^{p^n} A^{\text{ob}}$$

ce qui montre que A^{ob} porte la topologie ω^{\flat} -adique. Pour voir que $\ker(\pi_0) = \omega^{\flat} A^{\text{ob}}$, il suffit de remarquer que si $(x_n)_{n \geq 0} \in \ker(\pi_0)$, alors pour tout $n \geq 0$ on a $(x_n/\omega_n)^{p^n} = x_0/\omega \in A^{\circ}$ donc $x_n/\omega_n \in A^{\circ}$ car A° est intégralement clos, et $\omega^{\flat}(x_n)_{n \geq 0} = (x_n/\omega_n)_{n \geq 0}$ est alors un élément bien défini de A^{ob} .

— Cela montre au passage que le débasculement induit une injection

$$A^{\text{ob}}/\omega^{\flat} \rightarrow A^{\circ}/\omega.$$

La surjectivité du Frobenius $\Phi : A^{\circ}/\omega \rightarrow A^{\circ}/\omega^p$ montre que cette application est surjective, ce qui nous donne l'isomorphisme d'anneaux

$$A^{\text{ob}}/\omega^{\flat} \xrightarrow{\sim} A^{\circ}/\omega.$$

— L'isomorphisme d'anneaux topologiques

$$A^{\text{ob}} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{\Phi} A^{\circ}/\omega,$$

fait que A^{ob} s'identifie à une limite projective d'anneaux discrets donc est complet.

En résumé, on a montré que A^{ob} est un anneau topologique complet pour la topologie ω^{\flat} -adique, que c'est un anneau parfait de caractéristique p , et qu'on a l'isomorphisme d'anneaux annoncé en (iii).

— Montrons que l'addition est bien définie sur A^{\flat} . Soient $(x_n)_{n \geq 0}, (y_n)_{n \geq 0} \in A^{\flat}$. Comme $A = A^{\circ} \left[\frac{1}{\omega} \right]$, il existe un entier $N \geq 0$ tel que $\omega^N x_0 \in A^{\circ}$ et $\omega^N y_0 \in A^{\circ}$, d'où $(\omega^{\flat})^N (x_n)_{n \geq 0} \in A^{\text{ob}}$ et $(\omega^{\flat})^N (y_n)_{n \geq 0} \in A^{\text{ob}}$ car A° est intégralement clos dans A . Par ce qui précède, $(\omega^{\flat})^N ((x_n)_{n \geq 0} + (y_n)_{n \geq 0}) \in A^{\text{ob}}$ est bien défini, donc $(x_n)_{n \geq 0} + (y_n)_{n \geq 0} \in A^{\flat}$ l'est aussi car ω^{\flat} est inversible dans A^{\flat} .

On a vu au passage que $A^{\flat} = A^{\text{ob}} \left[\frac{1}{\omega^{\flat}} \right]$ ce qui fait de A^{\flat} un anneau topologique. Ainsi, A^{\flat} est un anneau de Tate avec A^{ob} comme anneau de définition et ω^{\flat} pour pseudo-uniformisante. Comme A^{\flat} est également complet, parfait et de caractéristique p , c'est un anneau perfectoïde (proposition 2.1.5). On a montré (i) et (iii).

— Pour montrer (ii), il reste à voir que $A^{\text{bo}} := (A^{\flat})^{\circ} = \varprojlim_{\Phi} A^{\circ} =: A^{\text{ob}}$. Comme A° est borné dans A , on voit que A^{ob} est borné dans A^{\flat} , donc $A^{\text{ob}} \subseteq A^{\text{bo}}$. En effet, soit U' un ouvert de A^{ob} . Il existe $n \geq 0$ et U un ouvert de A° tel que $\varpi_n^{-1}(U) \subseteq U'$, où $\varpi_n : A^{\text{ob}} \rightarrow A^{\circ}$ est la projection d'indice n . Il existe un ouvert V de A° tel que $V \cdot A^{\circ} \subseteq U$. On vérifie que l'ouvert $V' = \varpi_n^{-1}(V)$ de A^{ob} est tel que

$$V' \cdot A^{\text{ob}} \subseteq \varpi_n^{-1}(U) \subseteq U'.$$

Réciproquement, soit $x = (x_n)_{n \geq 0} \in A^{\text{bo}}$. Comme x est à puissances bornées, il existe $N \geq 0$ tel que pour tout $n \geq 0$ on ait $(\omega^{\flat})^N x^n \in A^{\text{ob}}$. En particulier, $x_0 \in A^{\circ}$. Comme on a $x_n^{p^n} = x_0$ pour tout $n \geq 0$, on obtient $x_n \in A^{\circ}$ car A° est intégralement clos, et donc $x \in A^{\text{ob}}$. Cela achève de montrer (ii).

— Montrons (iv). Soit A^+ un sous-anneau d'éléments entiers de A . Remarquons que

$$\omega A^{\circ} \subseteq A^{\circ\circ} \subseteq A^+ \subseteq A^{\circ}$$

donc la projection $A^{\circ} \rightarrow A^{\circ}/\omega$ induit une bijection entre les sous-anneaux d'éléments entiers de A et les sous-anneaux ouverts intégralement clos de A°/ω . De même, on a une bijection entre les sous-anneaux d'éléments entiers de A^{\flat} et les sous-anneaux ouverts intégralement clos de $A^{\text{bo}}/\omega^{\flat}$ via la projection $A^{\text{bo}} \rightarrow A^{\text{bo}}/\omega^{\flat}$. L'isomorphisme

$A^\circ/\omega \xrightarrow{\sim} A^{b^\circ}/\omega^b$ considéré ci-dessus induit donc une bijection entre les sous-anneaux d'éléments entiers de A et ceux de A^b . Montrons que cette bijection est donnée par $A^+ \mapsto \varprojlim_{\Phi} A^+$. Si $(a_n)_{n \geq 0} \in A^{b^\circ}$, on a $(a_n)_{n \geq 0} \in \varprojlim_{\Phi} A^+$ si et seulement si $a_0 \in A^+$ car A^+ est intégralement clos. Comme $a_0 + \omega A^\circ$ est l'image de $(a_n)_{n \geq 0} + \omega^b A^{b^\circ} \in A^{b^\circ}/\omega^b$ par l'isomorphisme de (iii), cela permet de conclure. \square

Définition 2.2.3. Soit A un anneau perfectoïde et A^+ un sous-anneau d'éléments entiers de A . On dit que (A, A^+) est une *paire de Huber perfectoïde*. La construction 2.2.2 fournit une paire de Huber perfectoïde (A^b, A^{b+}) , appelée le *basculé* de la paire (A, A^+) .

Le basculement $(A, A^+) \mapsto (A^b, A^{b+})$ est un foncteur de la catégorie des paires de Huber perfectoïdes vers la catégorie des paires de Huber perfectoïdes de caractéristique p .

Exemple 2.2.4. (i) Considérons $K = \mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty})$ et $p^b = (p, p^{1/p}, \dots)$, qui est une pseudo-uniformisante de K^b . On a

$$K^{ob} = \varprojlim_{\Phi} K/p = \varprojlim_{\Phi} \mathbb{Z}_p[p^{1/p^\infty}]/p = \varprojlim_{\Phi} \mathbb{F}_p[(p^b)^{1/p^\infty}]/p^b = \mathbb{F}_p[(p^b)^{1/p^\infty}]$$

donc on localisant par p , on obtient un isomorphisme $K^{rb} = \mathbb{F}_p((T^{1/p^\infty}))$ en envoyant T vers p^b .

(ii) En posant $K = \mathbb{Q}_p^{\text{cycl}}$ (exemple 2.1.10 (v)) et en considérant la pseudo-uniformisante $(\mu_p, \mu_{p^2}, \dots) - 1$ de K^b , un raisonnement analogue montre que K^b est isomorphe à $\mathbb{F}_p((T^{1/p^\infty}))$.

Remarque 2.2.5. Soit A un anneau perfectoïde de caractéristique p . Par le théorème 1.4.8, le Frobenius $\Phi : A \rightarrow A$ est un isomorphisme d'anneaux topologiques. En particulier, on en déduit que le débasculement $(\cdot)^\sharp : A^b \rightarrow A$ est aussi un isomorphisme d'anneaux topologiques, donc A s'identifie à son basculé.

Lemme 2.2.6. Soit (K, K^+) une paire perfectoïde, de basculé (K^b, K^{b+}) . Alors K est un corps perfectoïde si et seulement si K^b est un corps perfectoïde. Lorsque ces conditions sont vérifiées, K^+ est un anneau de valuation de K si et seulement si K^{b+} est un anneau de valuation de K^b .

Démonstration. Voir [28, Lemma 5.21]. \square

2.2.2 Débasculement

Définition 2.2.7. Soit (A, A^+) une paire de Huber perfectoïde de caractéristique p . Si (B, B^+) est une paire de Huber perfectoïde et

$$\varphi : B^b \xrightarrow{\sim} A$$

est un isomorphisme d'anneaux topologiques se restreignant en un isomorphisme

$$\varphi : (B^+)^b \xrightarrow{\sim} A^+,$$

on dit que $((B, B^+), \varphi)$ est un *débasculé* de (A, A^+) .

Remarque 2.2.8. Bien que le basculé d'un anneau perfectoïde soit toujours de caractéristique p , un débasculé n'est pas nécessairement de caractéristique 0. Ainsi, si (A, A^+) est une paire de Huber perfectoïde de caractéristique p , la paire $((A, A^+), \text{id}_A)$ est un débasculé de (A, A^+) .

Définition 2.2.9. Soit A un anneau perfectoïde et B une A -algèbre topologique. On dit que B est une A -algèbre perfectoïde si B est un anneau perfectoïde.

Remarque 2.2.10. Soit A un anneau perfectoïde et $A \rightarrow B$ un morphisme vers un anneau de Huber B . Soit $\omega \in A$ une pseudo-uniformisante telle que $p \in \omega^p A^\circ$. Comme A est un anneau de Tate, le lemme 1.2.31 montre que B est un anneau de Tate avec ω comme pseudo-uniformisante, et on a de plus $p \in \omega^p B^\circ$. Pour que B soit une A -algèbre perfectoïde, il suffit donc (par le lemme 2.1.2) que B soit complet et que le Frobenius $\Phi : B^\circ/p \rightarrow B^\circ/p$ soit surjectif.

On renvoie à la section A.4 de l'annexe pour des rappels sur les vecteurs de Witt.

Lemme 2.2.11. Soient (A, A^+) une paire perfectoïde de caractéristique p et $\omega \in A^+$ est une pseudo-uniformisante de A . Alors $W(A^+)$ est complet pour la topologie $[\omega]$ -adique.

Démonstration. Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ que $W(A^+)/p^n$ est $[\omega]$ -adiquement complet. Comme $W(A^+)$ est p -adiquement complet, cela permettra de conclure.

— Pour $n = 1$ on a un isomorphisme d'anneaux

$$W(A^+)/p = A^+$$

envoyant $[\omega]$ vers ω . Comme A^+ est ω -adiquement complet (lemme 1.2.32 (iii)), cela montre que $W(A^+)/p$ est $[\omega]$ -adiquement complet.

— Pour $n \geq 1$, on a une suite exacte

$$0 \rightarrow p^n W(A^+)/p^{n+1} W(A^+) \rightarrow W(A^+)/p^{n+1} \rightarrow W(A^+)/p^n \rightarrow 0.$$

Comme p est régulier dans $W(A^+)$, on a un isomorphisme de groupes abéliens

$$p^n W(A^+)/p^{n+1} W(A^+) = W(A^+)/p = A^+.$$

Comme A^+ est ω -adiquement complet (par le lemme 1.2.32 (iii) et car A est complet) et que $W(A^+)/p^n$ est $[\omega]$ -adiquement complet par l'hypothèse de récurrence, la suite exacte ci-dessus donne un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A^+ & \longrightarrow & W(A^+)/p^{n+1} & \longrightarrow & W(A^+)/p^n \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & A^+ & \longrightarrow & \varprojlim_{m \geq 1} W(A^+)/p^{n+1}, [\omega]^m & \longrightarrow & W(A^+)/p^n \end{array}$$

Le lemme du serpent montre alors que $W(A^+)/p^{n+1}$ est $[\omega]$ -adiquement complet.

— Comme $W(A^+)$ est p -adiquement complet, on a

$$W(A^+) = \varprojlim_{n \geq 1} W(A^+)/p^n$$

donc

$$\begin{aligned} \varprojlim_{m \geq 1} W(A^+)/[\omega]^m &= \varprojlim_{m, n \geq 1} W(A^+)/(\omega^m, p^n) \\ &= \varprojlim_{n \geq 1} \left(\varprojlim_{m \geq 1} W(A^+)/(\omega^m, p^n) \right) \\ &= \varprojlim_{n \geq 1} W(A^+)/p^n \\ &= W(A^+) \end{aligned}$$

ce qui montre que $W(A^+)$ est complet pour la topologie $[\omega]$ -adique. □

Définition 2.2.12. Soit (A, A^+) une paire de Huber perfectoïde de caractéristique p . On dit qu'un idéal \mathcal{I} de $W(A^+)$ est *primitif de degré 1* si il existe une pseudo-uniformisante $\omega \in A^+$ et un élément $\alpha \in W(A^+)$ tel que $\mathcal{I} = \xi W(A^+)$, où $\xi = p + [\omega]\alpha$.

Lemme 2.2.13. On reprend les notations de la définition 2.2.12.

- (i) L'élément ξ est régulier dans $W(A^+)$.
- (ii) L'élément $[\omega]$ est régulier dans $W(A^+)/\xi W(A^+)$.
- (iii) L'anneau $W(A^+)/\xi W(A^+)$ muni de la topologie quotient est $[\omega]$ -adiquement complet.

Démonstration. (i) Soit $a = \sum_{n \geq 0} [a_n]p^n \in W(A^+)$ tel que $a\xi = 0$. Par définition de ξ on a

$$\sum_{n \geq 0} [a_n]p^{n+1} = 0 \pmod{[\omega]W(A^+)}$$

donc pour tout $n \geq 0$, $a_n \in \omega A^+$ par unicité du développement en base p . Il existe alors $a' \in W(A^+)$ tel que $a = [\omega]a'$; comme $[\omega]$ est régulier dans $W(A^+)$, on obtient $a'\xi = 0$ et on peut itérer le raisonnement. On trouve ainsi

$$a \in \bigcap_{n \geq 0} [\omega]^n W(A^+) = \{0\},$$

car $W(A^+)$ est $[\omega]$ -adiquement séparé (lemme 2.2.11), donc $a = 0$.

- (ii) Comme p est régulier dans $W(A^+)$ et que ω est régulier dans $A^+ = W(A^+)/pW(A^+)$, on trouve que p est régulier dans $W(A^+)/[\omega]W(A^+)$. On en déduit que ξ est régulier dans $W(A^+)/[\omega]W(A^+)$ puis que $[\omega]$ est régulier dans $W(A^+)/\xi W(A^+)$.
- (iii) On a une suite exacte de $W(A^+)$ -modules :

$$0 \rightarrow \xi W(A^+) \rightarrow W(A^+) \rightarrow W(A^+)/\xi \rightarrow 0.$$

Comme ξ est régulier, le $W(A^+)$ -module $\xi W(A^+)$ est plat donc la complétion $[\omega]$ -adique de cette suite exacte est encore exacte par la proposition A.3.9 (ii). Les deux premiers termes étant $[\omega]$ -adiquement complet, le quotient $W(A^+)/\xi$ l'est aussi. □

Proposition 2.2.14. Soient (A, A^+) une paire de Huber perfectoïde de caractéristique p et $(A^\sharp, A^{\sharp+})$ un débasculé de (A, A^+) .

(i) L'application

$$\theta : W(A^+) \rightarrow A^{\sharp+}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} [a_n] p^n \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^\sharp p^n.$$

est un morphisme surjectif d'anneaux topologiques.

(ii) Le noyau de θ est un idéal primitif de degré 1 de $W(A^+)$.

(iii) Soit \mathcal{I} un idéal primitif de degré 1 de $W(A^+)$. Alors un élément $\chi = (\chi_0, \chi_1, \dots) \in \mathcal{I}$ est un générateur de \mathcal{I} si et seulement si χ_1 est inversible dans A^+ .

Démonstration. (i) — Soit $\omega \in A^+$ une pseudo-uniformisante de A tel que $\omega^\sharp \in A^{\sharp+}$ soit une pseudo-uniformisante de A^\sharp vérifiant $p \in (\omega^\sharp)^p A^{\sharp\circ}$. Soit $z \in A^{\sharp\circ}$ tel que $p = (\omega^\sharp)^p z$; il existe $N \geq 1$ tel que $(\omega^\sharp z)^N \in A^{\sharp+}$ d'où $\omega^\sharp z \in A^{\sharp+}$. Ainsi $p(\omega^\sharp)^{1-p} \in A^{\sharp+}$ donc $(\omega^\sharp)^{p-1}$ divise p dans $A^{\sharp+}$, donc ω^\sharp aussi. On remplace alors ω par $\omega^{\frac{1}{p}}$, qui est ainsi une pseudo-uniformisante de A tel que $\omega^\sharp \in A^{\sharp+}$ soit une pseudo-uniformisante de A^\sharp vérifiant $p \in (\omega^\sharp)^p A^{\sharp+}$.

— Comme $A^{\sharp+}$ est complet pour la topologie ω^\sharp -adique, il suffit de vérifier que pour tout $m \geq 1$, la post-composition de θ avec la projection $A^{\sharp+} \rightarrow A^{\sharp+}/(\omega^\sharp)^m$

$$W(A^+) \xrightarrow{\theta} A^{\sharp+} \xrightarrow{\text{mod } (\omega^\sharp)^m} A^{\sharp+}/(\omega^\sharp)^m$$

est un morphisme d'anneaux. Or, le morphisme d'anneaux induit par la m -ième application fantôme (définition A.4.9 (iii))

$$\begin{aligned} W(A^{\sharp+}) &\xrightarrow{W_m} A^{\sharp+} \xrightarrow{\text{mod } (\omega^\sharp)^m} A^{\sharp+}/(\omega^\sharp)^m \\ (a_n)_{n \geq 0} &\mapsto \sum_{n=0}^m a_n^{p^{m-n}} p^n \mapsto \sum_{n=0}^m a_n^{p^{m-n}} p^n \text{ mod } (\omega^\sharp)^m \end{aligned}$$

se factorise par $W(A^{\sharp+}/\omega^\sharp)$. En effet, si $0 \leq n \leq m$ et $a_n = a'_n \text{ mod } \omega^\sharp$, alors

$$(a_n)^{p^{m-n}} p^n = (a'_n)^{p^{m-n}} p^n \text{ mod } (\omega^\sharp)^m.$$

On a donc un morphisme d'anneaux

$$f_m : W(A^{\sharp+}/\omega^\sharp) \rightarrow A^{\sharp+}/(\omega^\sharp)^m.$$

L'isomorphisme d'anneaux topologiques $A^+ \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{\Phi} A^{\sharp+}/\omega^\sharp$ et la projection sur la coordonnée d'indice m

$$\pi_m := (\text{mod } \omega^\sharp) \circ (\cdot)^\sharp \circ \Phi^{-m} : A^+ \rightarrow A^{\sharp+}/\omega^\sharp$$

permettent de considérer le morphisme composé

$$\begin{aligned} W(A^+) &\xrightarrow{W(\pi_m)} W(A^{\sharp+}/\omega^\sharp) \xrightarrow{f_m} A^{\sharp+}/(\omega^\sharp)^m \\ \sum_{n=0}^{+\infty} [a_n] p^{-n} p^n = (a_n)_{n \geq 0} &\mapsto (\pi_m(a_n))_{n \geq 0} \mapsto \sum_{n=0}^m \pi_m(a_n)^{p^{m-n}} p^n \\ &= \sum_{k=0}^m (a_n^\sharp)^{p^{-n}} p^n \text{ mod } (\omega^\sharp)^m \end{aligned}$$

qui est égal à $\theta \text{ mod } (\omega^\sharp)^m$. Cela montre que θ est un morphisme d'anneaux topologiques.

— Montrons que θ est surjectif. Comme $\theta([\omega]) = \omega^\sharp$, on a un morphisme induit

$$\bar{\theta} : W(A^+)/[\omega] \rightarrow A^{\sharp+}/\omega^\sharp$$

qui est égal à la composée des morphismes d'anneaux surjectifs

$$W(A^+)/[\omega] \xrightarrow{\overline{\text{mod } p}} A^+/\omega \xrightarrow{\overline{(\cdot)^\sharp}} A^{\sharp+}/\omega^\sharp$$

Ainsi, $\bar{\theta}$ est surjectif. Comme $W(A^+)$ est $[\omega]$ -adiquement complet et que $A^{\sharp+}$ est ω^\sharp -adiquement complet, le lemme A.3.9 (i) appliqué avec $A = W(A^+)$ et $I = [\omega]W(A^+)$ (où $A^{\sharp+}$ est un $W(A^+)$ -module via θ) montre la surjectivité de θ .

(ii) Trouvons $f \in \omega A^+$ tel que

$$f^\sharp = p \pmod{p\omega^\sharp A^{\sharp+}}.$$

Soit $\alpha = p/\omega^\sharp \in A^{\sharp+}$. Par surjectivité de la projection d'indice 0

$$A^+ = \varprojlim_{\Phi} A^{\sharp+}/p \rightarrow A^{\sharp+}/p$$

il existe $\beta \in A^+$ tel que

$$\beta^\sharp = \alpha \pmod{pA^{\sharp+}}.$$

Soit $f = \omega\beta$. On a alors

$$f^\sharp = \omega^\sharp\alpha = p \pmod{p\omega^\sharp A^{\sharp+}}.$$

Par surjectivité de θ , il existe des $a_n \in A^+$ tels que

$$p = f^\sharp + p\omega^\sharp \sum_{n \geq 0} a_n^\sharp p^n.$$

Posons

$$\xi = p - [f] - [\omega] \sum_{n \geq 0} [a_n] p^{n+1}.$$

Alors $\theta(\xi) = 0$ et ξ engendre un idéal primitif de degré 1 de $W(A^+)$. Il reste à montrer que ξ engendre le noyau de θ . Le morphisme θ induit un morphisme surjectif

$$\rho : W(A^+)/\xi \rightarrow A^{\sharp+}/\omega^\sharp.$$

Par ailleurs, les identifications

$$W(A^+)/(\xi, [\omega]) = W(A^+)/(p, [\omega]) = A^+/\omega \xrightarrow{\simeq} A^{\sharp+}/\omega^\sharp$$

sont compatibles avec ρ , donc on a un isomorphisme

$$\bar{\rho} : W(A^+)/(\xi, [\omega]) \xrightarrow{\simeq} A^{\sharp+}/\omega^\sharp.$$

Par les lemmes 2.2.13 (iii) et A.3.9 (i), on sait que ρ est surjectif. Montrons que ρ est injectif. Par complétude, il suffit de montrer que pour tout $n \geq 1$, le morphisme induit

$$\bar{\rho}_n : W(A^+)/(\xi, [\omega]^n) \rightarrow A^{\sharp+}/(\omega^\sharp)^n$$

est injectif. On sait que $\bar{\rho}_1 = \bar{\rho}$ l'est. On a le diagramme commutatif suivant, à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
W(A^+)/(\xi, [\omega]^{n-1}) & \xrightarrow{[\omega]\cdot} & W(A^+)/(\xi, [\omega]^n) & \xrightarrow{\text{mod } [\omega]} & W(A^+)/(\xi, [\omega]) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow \bar{\rho}_{n-1} & & \downarrow \bar{\rho}_n & & \downarrow \bar{\rho}_1 & & \\
0 & \longrightarrow & A^{\sharp+}/(\omega^{\sharp})^{n-1} & \xrightarrow{\omega^{\sharp}\cdot} & A^{\sharp+}/(\omega^{\sharp})^n & \xrightarrow{\text{mod } \omega^{\sharp}} & A^{\sharp+}/\omega^{\sharp} \longrightarrow 0
\end{array}$$

En raisonnant par récurrence et par une chasse au diagramme, on a l'injectivité de $\bar{\rho}_n$ pour tout $n \geq 1$.

- (iii) Soit $\xi = p + [\omega]\alpha$ vérifiant $\mathcal{I} = \xi W(A^+)$ avec $\omega \in A^+$ une pseudo-uniformisante de A et $\alpha \in W(A^+)$. On note $\xi := (\xi_0, \xi_1, \dots)$, $\alpha := (\alpha_0, \alpha_1, \dots)$ et on a $[\omega] = (\omega, 0, \dots)$. Par l'exemple A.4.8 on a

$$\xi = p + [\omega]\alpha = (0, 1, 0, \dots) + (\omega\alpha_0, \omega^p\alpha_1, \dots) = (\omega\alpha_0, 1 + \omega^p\alpha_1, \dots)$$

donc $\xi_0 = \omega\alpha_0 \in \omega A^+$ et $\xi_1 = 1 + \omega^p\alpha_1$ est inversible dans A^+ car ce dernier est ω -adiquement complet. Il existe $\beta := (\beta_0, \beta_1, \dots) \in W(A^+)$ tel que $\chi = \beta\xi$, d'où

$$\chi = (\beta_0\chi_0, \beta_1\chi_0^p + \beta_0^p\chi_1, \dots).$$

Alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} = \chi W(A^+) &\iff \xi W(A^+) = \beta\xi W(A^+) \\
&\iff \beta \in W(A^+)^{\times} \text{ (car } \xi \text{ est régulier)} \\
&\iff \beta_0 \in (A^+)^{\times} \\
&\iff \beta_0^p \xi_1 \in (A^+)^{\times} \text{ (car } \xi_1 \text{ est inversible)} \\
&\iff \beta_1 \xi_0^p + \beta_0^p \xi_1 \in (A^+)^{\times} \text{ (car } \xi_0 \in \omega A^+ \text{ et par } \omega\text{-complétude de } A^+) \\
&\iff \chi_1 \in (A^+)^{\times}.
\end{aligned}$$

□

Théorème 2.2.15. On considère les catégories suivantes :

- (i) la catégorie des paires de Huber perfectoides. La proposition 2.2.14 fournit pour une telle paire (A, A^+) un morphisme surjectif d'anneaux topologiques

$$\theta_{A, A^+} : W(A^{b+}) \rightarrow A^+, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} [a_n] p^n \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_n^{\sharp} p^n;$$

- (ii) la catégorie des triplets (B, B^+, \mathcal{I}) , où (B, B^+) est une paire de Huber perfectoides de caractéristique p et \mathcal{I} est un idéal primitif de degré 1 de $W(B^+)$. Un morphisme

$$\varphi : (B, B^+, \mathcal{I}) \rightarrow (C, C^+, \mathcal{J})$$

est un morphisme de paires de Huber $\varphi : (B, B^+) \rightarrow (C, C^+)$ tel que $W\varphi(\mathcal{I}) = \mathcal{J}$.

Alors le foncteur de basculement

$$(A, A^+) \mapsto (A^b, A^{b+}, \ker(\theta_{A, A^+}))$$

induit une équivalence entre ces deux catégories. Un quasi-inverse est donné par

$$(B, B^+, \mathcal{I}) \mapsto \left((W(B^+)/\mathcal{I}) \left[\frac{1}{[\omega]} \right], W(B^+)/\mathcal{I} \right),$$

où $\omega \in B$ est une pseudo-uniformisante quelconque de B .

Démonstration. On procède en montrant que les composées de ces deux foncteurs sont quasi-isomorphes à l'identité.

— Soient $(A, A^+), (B, B^+)$ deux paires de Huber perfectoïdes et

$$\varphi : (A, A^+) \rightarrow (B, B^+)$$

un morphisme de paires de Huber. On a l'inclusion

$$W\varphi(\ker(\theta_{A, A^+})) \subseteq \ker(\theta_{B, B^+}),$$

d'où l'égalité par la proposition 2.2.14 (iii).

Ainsi, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} W(B^{b+})/\ker(\theta_{B, B^+}) & \xrightarrow{\theta_{B, B^+}} & B^+ \\ \uparrow W\varphi & & \uparrow \varphi \\ W(A^{b+})/\ker(\theta_{A, A^+}) & \xrightarrow{\theta_{A, A^+}} & A^+ \end{array}$$

où les lignes horizontales sont des isomorphismes d'anneaux topologiques. Soit $\omega^b \in A^{b+}$ une pseudo-uniformisante quelconque de A^b . En localisant le diagramme ci-dessus en (l'image de) $[\omega^b]$, on obtient le premier sens de l'équivalence de catégories.

— Réciproquement, soit (B, B^+, \mathcal{I}) un objet de la seconde catégorie. Soit $\omega \in B^+$ une pseudo-uniformisante de B . On note

$$B^{+\sharp} := W(B^+)/\mathcal{I} \quad \text{et} \quad B^\sharp := (W(B^+)/\mathcal{I}) \left[\frac{1}{[\omega]} \right].$$

Il faut d'abord montrer que $(B^\sharp, B^{+\sharp})$ est une paire de Huber perfectoïde.

- Le lemme 2.2.13 (iii) montre que $B^{+\sharp}$ est $[\omega]$ -adiquement complet, donc B^\sharp est un anneau de Tate complet pour la pseudo-uniformisante $[\omega]$.
- Soit $\omega' \in B^+$ une pseudo-uniformisante de B et $\alpha \in W(B^+)$ tel que $\xi := p - [\omega']\alpha$ vérifie $\mathcal{I} = \xi W(B^+)$. Dans B^\sharp on a

$$p = [\omega']\alpha = \left[(\omega')^{\frac{1}{p}} \right]^p \alpha$$

donc $\left[(\omega')^{\frac{1}{p}} \right]$ est une pseudo-uniformisante de B^\sharp dont la puissance p -ième divise p dans $B^{+\sharp}$.

- Comme le Frobenius $\Phi : B^+ \xrightarrow{\sim} B^+$ est un isomorphisme d'anneaux et que

$$B^{+\sharp}/p = W(B^+)/p = W(B^+)/(p, p - [\omega']\alpha) = B^+/\omega'(\alpha \bmod p),$$

on a la surjectivité du Frobenius $\Phi : B^{+\sharp}/p \rightarrow B^+/\omega'(\alpha \bmod p)$.

- On a des isomorphismes naturels d'anneaux topologiques

$$(B^{+\sharp})^b = \varprojlim_{\Phi} (B^{+\sharp}/[\omega]) = \varprojlim_{\Phi} W(B^+)/p = \varprojlim_{\Phi} B^+$$

donc

$$(B^{+\sharp})^b = (B^+)^b = B^+,$$

ce qui donne

$$(B^\sharp)^b = \left(B^+ \left[\frac{1}{[\omega]} \right] \right)^b = B^{b+} \left[\frac{1}{\omega^b} \right] = B^+ \left[\frac{1}{\omega} \right] = B$$

en utilisant que $[\omega]$ est régulier dans B^+ (lemme 2.2.13 (ii)) pour la deuxième égalité. Le raisonnement utilisé dans la démonstration de la construction 2.2.2 (iv) montre alors que $B^{+\sharp}$ est intégralement clos dans B^\sharp .

- On applique enfin le lemme 2.1.4 avec B^\sharp , $B^{+\sharp}$ et $[(\omega')^{\frac{1}{p}}]$ pour conclure que $(B^\sharp, B^{+\sharp})$ est perfectoïde, de basculé (B, B^+, \mathcal{I}) .

Les séries d'isomorphismes ci-dessus étant fonctorielles en (B, B^+, \mathcal{I}) , on obtient l'autre sens de l'équivalence de catégories. □

Corollaire 2.2.16. Soit (A, A^+) une paire perfectoïde. Le foncteur de basculement

$$(B, B^+) \mapsto (B^b, B^{b+})$$

induit une équivalence entre la catégorie des (A, A^+) -algèbres perfectoïdes et la catégorie des (A^b, A^{b+}) -algèbres perfectoïdes. En notant $\theta := \theta_{A, A^+}$, un quasi-inverse est donné par

$$(C, C^+) \mapsto (W(C^+) \otimes_{W(A^+), \theta} A, W(C^+) \otimes_{W(A^+), \theta} A^+).$$

Exemple 2.2.17. (i) Si (A, A^+) est une paire perfectoïde de caractéristique p , un élément primitif du débasculé trivial $((A, A^+), \text{id})$ est $\xi := p$.

(ii) Pour $K = \mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty})$ de basculé $\mathbb{F}_p((T^{1/p^\infty}))$, un élément primitif de degré 1 est $p - [T] \in W(\mathbb{F}_p[[T^{1/p^\infty}]])$.

(iii) Pour $K = \mathbb{Q}_p^{\text{cycl}}$ de basculé $K^b = \mathbb{F}_p((T^{1/p^\infty}))$, un générateur de l'idéal associé à ce débasculé est

$$\sum_{k=0}^{p-1} [1 + T]^k \in W(K^{\text{ob}}).$$

Remarque 2.2.18. Le théorème 2.2.15 montre que la donnée d'un idéal primitif de degré 1 d'une paire perfectoïde de caractéristique p correspond exactement au choix d'un débasculé de cette paire. On peut donc se demander si on peut paramétriser l'ensemble des débasculés par un objet géométrique. Des réponses sont apportées par la *courbe de Fargues-Fontaine* (voir [10], [25], [30, §13.5], [34, §2.3] ou [19, §3]) et par la théorie des *diamants* (voir [29], [25], [30, §8], [34, §3.2] ou [19, §4.3]).

2.2.3 Début de géométrisation du basculement

Définition 2.2.19. Soit (A, A^+) une paire perfectoïde, $X := \text{Spa}(A, A^+)$ et $X^b := \text{Spa}(A^b, A^{b+})$. Pour $x \in X$, on note $x^b \in X^b$ la valuation définie par

$$\forall f \in A^b, |f(x^b)| := |f^\sharp(x)|.$$

On obtient de cette façon une application continue

$$\tau : |X| \rightarrow |X^b|, \quad x \mapsto x^b.$$

Démonstration. Soit $x \in \text{Spa}(A, A^+)$. Les propriétés de l'application de débasculement $(\cdot)^\sharp : A^b \rightarrow A$ montrent que tous les axiomes de valuation sont immédiatement vérifiés, à l'exception de l'inégalité ultramétrique. Pour $f, g \in A^b$ on a

$$|(f + g)(x^b)| = |(f + g)^\sharp(x)| = \left| \lim_{n \rightarrow +\infty} \left((f^{1/p^n})^\sharp + (g^{1/p^n})^\sharp \right)^{p^n} (x) \right|$$

donc

$$\begin{aligned} |(f + g)(x^b)| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \left((f^{1/p^n})^\sharp + (g^{1/p^n})^\sharp \right)^{p^n} (x) \right| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \max \left(\left| \left((f^{1/p^n})^\sharp \right)^{p^n} (x) \right|, \left| \left((g^{1/p^n})^\sharp \right)^{p^n} (x) \right| \right) \\ &= \max \left(|f^\sharp(x)|, |g^\sharp(x)| \right) \\ &= \max \left(|f(x^b)|, |g(x^b)| \right) \end{aligned}$$

Comme $|\cdot(x^b)| = |\cdot(x)| \circ (\cdot)^\sharp$, la valuation x^b est continue. Par ailleurs, $(A^+)^b = A^{+b}$ donc $x^b \in \text{Spa}(A^b, A^{+b})$.

Montrons que τ est continue. Soit $f_1, \dots, f_n \in A^b$ engendrant A^b , et $g \in A^b$. L'image réciproque de l'ouvert rationnel $X^b \left(\frac{f_1, \dots, f_n}{g} \right)$ est l'ouvert rationnel $X \left(\frac{f_1^\sharp, \dots, f_n^\sharp}{g^\sharp} \right)$, ce qui permet de conclure. \square

Proposition 2.2.20. Soit (K, K^+) une paire perfectoïde, avec K un corps perfectoïde et $K^+ \subseteq K^\circ$ un anneau de valuation ouvert. On note $X = \text{Spa}(K, K^+)$ et $X^b = \text{Spa}(K^b, K^{b+})$. Alors l'application de la définition 2.2.19

$$\tau : |X| \xrightarrow{\sim} |X^b|, \quad x \mapsto x^b.$$

est un homéomorphisme.

Démonstration. L'exemple 1.3.5 (iii) montre que $\text{Spa}(K, K^+)$ est homéomorphe à

$$\text{Spec}(K^+/K^{\circ\circ}) = \text{Spec}(K^+/\omega).$$

De même (lemme 2.2.6), on a un homéomorphisme entre $\text{Spa}(K^b, K^{b+})$ et

$$\text{Spec}(K^{+b}/K^{\circ\circ b}) = \text{Spec}(K^{+b}/\omega^b).$$

Comme le débasculement induit un isomorphisme d'anneaux

$$K^{+b}/\omega^b \xrightarrow{\sim} K^+/\omega,$$

on obtient ainsi un homéomorphisme entre $\text{Spa}(K, K^+)$ et $\text{Spa}(K^b, K^{b+})$. On vérifie qu'il est donné par $x \mapsto x^b$. \square

Remarque 2.2.21. Pour un anneau perfectoïde A , l'application

$$A^b \rightarrow A, \quad f \mapsto f^\sharp$$

est loin d'être surjective en général. On dispose néanmoins du lemme d'approximation suivant, qui nous permettra (théorème 2.4.1 (ii)) d'étendre l'homéomorphisme de la proposition 2.2.20 à une paire perfectoïde quelconque.

Proposition 2.2.22. Soient (A, A^+) une paire perfectoïde, $X = \text{Spa}(A, A^+)$ et $\omega \in A^+$ une pseudo-uniformisante de A telle que $\omega = (\omega^b)^\sharp$ pour $\omega^b \in A^{b+}$. Considérons $f \in A$, $c \in \mathbb{R}_+$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Alors il existe $g_{c,\varepsilon} \in A^b$ tel que pour tout $x \in X$ on ait

$$\left| (f - g_{c,\varepsilon}^\sharp)(x) \right| \leq |\omega(x)|^{1-\varepsilon} \max(|f(x)|, |\omega(x)|^c).$$

Démonstration. La démonstration est un peu délicate. On renvoie à [28, Corollary 6.7 (i)] (qui s'adapte au cas d'une paire perfectoïde) ou à [23, Corollary V.1.6.5]. \square

2.3 Presque mathématiques

Nous donnons dans cette section les définitions et résultats de base des *presque mathématiques*¹ [12, §2.2] en les spécialisant au cas nous intéressant. Nous omettons la grande majorité des démonstrations, pour laquelle on renvoie à [23, §V.1.5 et §V.3] ou [28, §4.].

Soit (A, A^+) une paire perfectoïde, $\omega^b \in A^{b+}$ une pseudo-uniformisante de A^b et $\omega := (\omega^b)^\sharp \in A^+$ la pseudo-uniformisante correspondante de A , supposée telle que ω^p divise p dans A^+ . On note $X = \text{Spa}(A, A^+)$ et $X^b = \text{Spa}(A^b, A^{b+})$.

2.3.1 Catégorie des presque modules

Définition 2.3.1. Soit M un A^+ -module. Un élément $x \in M$ est dit *presque nul* si $A^{\circ\circ}x = 0$. On dit que M est *presque nul* si $A^{\circ\circ}M = 0$, ou de façon équivalente si $A^{\circ\circ} \otimes_{A^+} M = 0$.

Lemme 2.3.2. Soit M un A^+ -module. Alors M est presque nul si et seulement si $\omega^{1/p^n}M = 0$ pour tout $n \geq 1$.

Remarque 2.3.3. Ainsi, un presque module est définie à $A^{\circ\circ}$ -torsion près. La proposition 2.3.8 (ii) illustre ce phénomène.

On renvoie à la section A.6 pour la notion de quotient d'une catégorie abélienne par une sous-catégorie de Serre.

Définition 2.3.4. La sous-catégorie pleine des A^+ -modules dont les objets sont les modules presque nuls est une sous-catégorie de Serre. La catégorie localisée est une catégorie abélienne appelée la catégorie des *presque A^+ -modules* ou des $(A^+)^a$ -modules. On note $M \rightarrow M^a$ le foncteur de localisation.

Démonstration. On vérifie le lemme A.6.2. La stabilité par extension vient de l'égalité $(A^{\circ\circ})^2 = A^{\circ\circ}$. \square

1. *almost mathematics* en anglais.

Proposition 2.3.5. (i) Si M, N sont deux A^+ -modules alors

$$\mathrm{Hom}_{(A^+)^a}(M^a, N^a) = \mathrm{Hom}_{A^+}(A^{\circ\circ} \otimes_{A^+} M, N)$$

ce qui munit $\mathrm{Hom}_{(A^+)^a}(M^a, N^a)$ d'une structure de A^+ -module naturelle en M^a et N^a .

(ii) Le foncteur

$$(A^+)^a\text{-mod} \rightarrow (A^+)\text{-mod}, \quad M \mapsto M_* := \mathrm{Hom}_{A^+}(A^{\circ\circ}, M)$$

est un adjoint à droite du foncteur de localisation $M \rightarrow M^a$. On dit que le foncteur $M \mapsto M_*$ est le foncteur des *presque éléments*. De plus, pour M un $(A^+)^a$ -module, la counité de l'adjonction

$$M \xrightarrow{\simeq} (M_*)^a$$

est un isomorphisme naturel en M .

(iii) Le foncteur

$$(A^+)^a\text{-mod} \rightarrow (A^+)\text{-mod}, \quad M \mapsto M_! := A^{\circ\circ} \otimes_{A^+} M_*$$

est exact et est un adjoint à gauche du foncteur de localisation $M \rightarrow M^a$. De plus, pour M un $(A^+)^a$ -module, l'unité de l'adjonction

$$M \xrightarrow{\simeq} (M_!)^a$$

est un isomorphisme naturel en M .

Démonstration. Voir [12, §2.2]. □

Définition 2.3.6. Soient $\varphi : M \rightarrow N$ une morphisme A^+ -linéaire entre A^+ -modules. On dit que φ est *presque injectif* (resp. *presque surjectif*) si $\varphi^a : M^a \rightarrow N^a$ est injectif (resp. surjectif), autrement dit si $\ker \varphi$ (resp. $\mathrm{coker} \varphi$) est presque nul. On dit que φ est un *presque isomorphisme* si il est presque injectif et presque surjectif.

Remarque 2.3.7. L'inclusion $A^+ \rightarrow A^\circ$ est un presque isomorphisme car A°/A^+ est presque nul. Cela induit en particulier une équivalence entre la catégorie des $(A^+)^a$ -modules et celle des $(A^\circ)^a$ -modules.

Proposition 2.3.8. Soit M un A^+ -module.

(i) Le morphisme de A^+ -modules

$$\alpha_M : M \rightarrow M_*, \quad x \mapsto (a \in A^{\circ\circ} \mapsto ax \in M)$$

est un presque isomorphisme.

(ii) Si M est sans ω -torsion alors M_* s'identifie au A^+ -module

$$M_* = \{m \in A \otimes_{A^+} M, \forall n \in \mathbb{N}, \omega^{1/p^n} m \in M\} = \{m \in A \otimes_{A^+} M, \forall a \in A^{\circ\circ}, am \in M\}.$$

Démonstration. Voir [23, Proposition V.1.5.8] pour les détails. Expliquons néanmoins comment s'incarne l'identification en (ii). Comme ω est inversible dans $A \otimes_{A^+} M$, l'évaluation en ω induit un isomorphisme $(A \otimes_{A^+} M)_* \xrightarrow{\simeq} A \otimes_{A^+} M$, d'inverse $\omega^{-1} \alpha_{A \otimes_{A^+} M}$. Par ailleurs, M est sans ω -torsion donc on a une injection $M \rightarrow A \otimes_{A^+} M, m \mapsto 1 \otimes m$. L'application du foncteur des presque éléments et l'isomorphisme ci-dessus donne alors des injections $M \rightarrow M_* \rightarrow A \otimes_{A^+} M$. □

2.3.2 Localisations rationnelles d'un anneau perfectoïde et basculement

Proposition 2.3.9. Soit B un anneau de Huber complet, B_0 un sous-anneau ouvert de B et $\varphi : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux de Huber tel que $\varphi(A^+) \subseteq B_0$. On suppose que B_0 est complet pour la topologie ω -adique et que le Frobenius

$$B_0/\omega \rightarrow B_0/\omega^p, \quad x \mapsto x^p$$

est un presque isomorphisme. Alors B est un anneau perfectoïde, B_0 est un anneau de définition de B et $B^\circ = (B_0)_*$. En particulier, l'inclusion $B_0 \rightarrow B^\circ$ induit un presque isomorphisme.

Démonstration. Voir [23, Proposition V.1.5.10]. \square

Remarque 2.3.10. Comme A est perfectoïde, le Frobenius $\Phi : A^\circ/\omega \rightarrow A^\circ/\omega^p$ est un isomorphisme. La remarque 2.3.7 montre alors qu'on a dans la catégorie des $(A^+)^a$ -modules le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A^+/\omega & \xrightarrow{\Phi} & A^+/\omega^p \\ \parallel & & \parallel \\ A^\circ/\omega & \xrightarrow{\Phi} & A^\circ/\omega^p \end{array}$$

Cela montre que le Frobenius $\Phi : A^+/\omega \rightarrow A^+/\omega^p$ est un presque isomorphisme.

Corollaire 2.3.11. Pour $n \geq 1$ un entier, on note $A^+ \langle X_1^{1/p^\infty}, \dots, X_n^{1/p^\infty} \rangle$ la complétion de la A^+ -algèbre

$$A^+ [X_1^{1/p^\infty}, \dots, X_n^{1/p^\infty}] := \bigcup_{m \geq 0} A^+ [X_1^{1/p^m}, \dots, X_n^{1/p^m}].$$

On pose alors $A \langle X_1^{1/p^\infty}, \dots, X_n^{1/p^\infty} \rangle := A^+ \langle X_1^{1/p^\infty}, \dots, X_n^{1/p^\infty} \rangle \left[\frac{1}{\omega} \right]$, ce qui ne dépend pas du choix de ω .

(i) La paire

$$\left(A \langle X_1^{1/p^\infty}, \dots, X_n^{1/p^\infty} \rangle, A^+ \langle X_1^{1/p^\infty}, \dots, X_n^{1/p^\infty} \rangle \right)$$

est perfectoïde et on a un isomorphisme de A^+ -modules

$$\left(A^\circ \langle X_1^{1/p^\infty}, \dots, X_n^{1/p^\infty} \rangle \right)_* = \left(A \langle X_1^{1/p^\infty}, \dots, X_n^{1/p^\infty} \rangle \right)^\circ$$

induisant un presque isomorphisme

$$A^\circ \langle X_1^{1/p^\infty}, \dots, X_n^{1/p^\infty} \rangle \stackrel{a}{=} \left(A \langle X_1^{1/p^\infty}, \dots, X_n^{1/p^\infty} \rangle \right)^\circ.$$

(ii) Le basculé de cette paire est la paire perfectoïde

$$\left(A^b \langle X_1^{1/p^\infty}, \dots, X_n^{1/p^\infty} \rangle, A^{b+} \langle X_1^{1/p^\infty}, \dots, X_n^{1/p^\infty} \rangle \right).$$

Démonstration. (i) On applique la proposition 2.3.9 avec $B = A \langle X_1^{1/p^\infty}, \dots, X_n^{1/p^\infty} \rangle$ et $B_0 = A^+ \langle X_1^{1/p^\infty}, \dots, X_n^{1/p^\infty} \rangle$, en utilisant la remarque 2.3.10.

(ii) On a

$$\begin{aligned} A^+ \langle X_1^{1/p^\infty}, \dots, X_n^{1/p^\infty} \rangle / \omega &= \bigcup_{m \geq 0} (A^+ / \omega) [X_1^{1/p^m}, \dots, X_n^{1/p^m}] \\ &= \bigcup_{m \geq 0} (A^{+b} / \omega^b) [X_1^{1/p^m}, \dots, X_n^{1/p^m}] \end{aligned}$$

grâce à l'isomorphisme de débasculement $A^{+b} / \omega^b \xrightarrow{\sim} A^+ / \omega$, ce qui donne

$$A^+ \langle X_1^{1/p^\infty}, \dots, X_n^{1/p^\infty} \rangle / \omega = A^{+b} \langle X_1^{1/p^\infty}, \dots, X_n^{1/p^\infty} \rangle / \omega^b.$$

En basculant on a alors

$$\begin{aligned} \varprojlim_{\Phi} (A^+ \langle X_1^{1/p^\infty}, \dots, X_n^{1/p^\infty} \rangle / \omega) &= \varprojlim_{\Phi} (A^{+b} \langle X_1^{1/p^\infty}, \dots, X_n^{1/p^\infty} \rangle / \omega^b) \\ &= A^{+b} \langle X_1^{1/p^\infty}, \dots, X_n^{1/p^\infty} \rangle \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure en localisant par (l'image de) ω . □

Corollaire 2.3.12. On suppose que la paire (A, A^+) est perfectoïde de caractéristique p . Soient $f_1, \dots, f_n, g \in A^+$ avec $f_n = \omega^N$ pour un entier $N \geq 1$ et $U := X \left(\frac{f_1, \dots, f_n}{g} \right)$ l'ouvert rationnel de X correspondant. On note $A^+ \left[\left(\frac{f_1}{g} \right)^{1/p^\infty}, \dots, \left(\frac{f_n}{g} \right)^{1/p^\infty} \right]$ la A^+ -algèbre engendrée par les $(f_i/g)^{1/p^m}$ pour $1 \leq i \leq n$ et $m \geq 0$, et $A^+ \left\langle \left(\frac{f_1}{g} \right)^{1/p^\infty}, \dots, \left(\frac{f_n}{g} \right)^{1/p^\infty} \right\rangle$ sa complétion.

(i) Le morphisme de A^+ -algèbres envoyant X_i^{1/p^m} sur $(f_i/g)^{1/p^m}$ induit une surjection presque injective (donc un presque isomorphisme)

$$A^+ [X_1^{1/p^\infty}, \dots, X_n^{1/p^\infty}] / (g^{1/p^\infty} X_i^{1/p^\infty} - f_i^{1/p^\infty}) \xrightarrow{\sim} A^+ \left[\left(\frac{f_1}{g} \right)^{1/p^\infty}, \dots, \left(\frac{f_n}{g} \right)^{1/p^\infty} \right],$$

$$\text{où } (g^{1/p^\infty} X_i^{1/p^\infty} - f_i^{1/p^\infty}) = (g^{1/p^m} X_i^{1/p^m} - f_i^{1/p^m}, 1 \leq i \leq n, m \geq 0).$$

(ii) La paire $(\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U))$ est perfectoïde et

$$(\mathcal{O}_X(U))^\circ = \left(A^+ \left\langle \left(\frac{f_1}{g} \right)^{1/p^\infty}, \dots, \left(\frac{f_n}{g} \right)^{1/p^\infty} \right\rangle \right)_*.$$

Démonstration. Pour (i), l'enjeu principal est de vérifier que $(g^{1/p^\infty} X_i^{1/p^\infty} - f_i^{1/p^\infty})$ localisé en ω est égal au noyau du morphisme localisé en ω , ce qui permet de montrer qu'ils sont presque égaux. Le point (ii) vient de la proposition 2.3.9. On renvoie à [24, V.1.5.13]. □

Corollaire 2.3.13. Soient $f_1, \dots, f_n, g \in A^+$ avec $f_n = \omega^N$ pour un entier $N \geq 1$. Soient aussi $a_1, \dots, a_n, b \in A^{b+}$ tels que $a_i^\sharp = f_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$, $b^\sharp = g$ et $a_n = (\omega^b)^N$. On pose $U = X \left(\frac{f_1, \dots, f_n}{g} \right)$ et $U^b = X^b \left(\frac{a_1, \dots, a_n}{b} \right)$.

- (i) Le morphisme de A^+ -algèbres envoyant X_i^{1/p^m} sur $(f_i/g)^{1/p^m}$ induit une surjection presque injective (donc un presque isomorphisme)

$$A^+ [X_1^{1/p^\infty}, \dots, X_n^{1/p^\infty}] / (g^{1/p^\infty} X_i^{1/p^\infty} - f_i^{1/p^\infty}) \xrightarrow{a} A^+ \left[\left(\frac{f_1}{g} \right)^{1/p^\infty}, \dots, \left(\frac{f_n}{g} \right)^{1/p^\infty} \right],$$

$$\text{où } (g^{1/p^\infty} X_i^{1/p^\infty} - f_i^{1/p^\infty}) = (g^{1/p^m} X_i^{1/p^m} - f_i^{1/p^m}, 1 \leq i \leq n, m \geq 0).$$

- (ii) La paire $(\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U))$ est perfectoïde et

$$(\mathcal{O}_X(U))^\circ = \left(A^+ \left\langle \left(\frac{f_1}{g} \right)^{1/p^\infty}, \dots, \left(\frac{f_n}{g} \right)^{1/p^\infty} \right\rangle \right)_*.$$

- (iii) L'unique morphisme de (A^b, A^{b+}) -algèbres

$$(\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U))^b \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_{X^b}(U^b), \mathcal{O}_{X^b}^+(U^b))$$

est un isomorphisme de paires de Huber.

Démonstration. L'argument est plus délicat ici, et utilise le théorème 2.2.15. Voir [23, V.1.5.15] ou [24, Proposition 6.4]. \square

Remarque 2.3.14. Le corollaire 2.3.13 (ii) donne en particulier une description topologique par générateurs et relations des localisations rationnelles d'un anneau perfectoïde, à ω^∞ -torsion près.

2.4 Espaces perfectoïdes

Théorème 2.4.1. Soient (A, A^+) une paire perfectoïde, $X = \text{Spa}(A, A^+)$ et $X^b = \text{Spa}(A^b, A^{b+})$.

- (i) Le préfaisceau \mathcal{O}_X est un faisceau d'anneaux topologiques et pour tout ouvert rationnel U de X , on a $H^k(U, \mathcal{O}_X) = 0$ pour tout $k > 0$.
- (ii) L'application

$$\tau : |X| \rightarrow |X^b|, \quad x \mapsto x^b$$

induit un homéomorphisme entre les espaces topologiques sous-jacents à X et X^b et une bijection entre leurs ouverts rationnels respectifs.

- (iii) Soit U un ouvert rationnel de X et $U^b := \tau(U)$. Alors la paire $(\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U))$ est perfectoïde et l'unique morphisme de (A^b, A^{b+}) -algèbres

$$(\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U))^b \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_{X^b}(U^b), \mathcal{O}_{X^b}^+(U^b))$$

est un isomorphisme de paires de Huber.

- (iv) Pour tout $x \in X$, le corps résiduel complété $(K(x), K^+(x))$ de x est un corps perfectoïde et l'unique morphisme de $(K(x), K^+(x))$ -algèbres

$$(K(x), K^+(x))^b \xrightarrow{\sim} (K(x^b), K^+(x^b))$$

est un isomorphisme de paires de Huber.

(v) Le A^+ -module $H^k(X, \mathcal{O}_X^+)$ est presque nul pour tout $k > 0$ et on a $H^0(X, \mathcal{O}_X^+) = A^+$.

Démonstration. — La paire (A, A^+) est stablement uniforme par le lemme 1.3.14 et le corollaire 2.3.13 (ii). On peut donc appliquer le théorème 1.3.35 pour obtenir (i). Le corollaire 2.3.13 (iii) donne alors le point (iii).

— Montrons que τ est surjectif. Soit $y \in X^b$. Comme y est analytique, le corps résiduel complété $(K(y), K^+(y))$ de y est non-archimédien de caractéristique p . Il est aussi parfait par le lemme 2.1.13. C'est donc un corps perfectoïde. Soit

$$(A, A^+) \rightarrow (K^\sharp, K^{+\sharp})$$

le morphisme entre paires perfectoïdes obtenu par débasculement (théorème 2.2.15) du morphisme d'anneaux de Huber

$$(A^b, A^{+b}) \rightarrow (K(y), K^+(y)).$$

Alors $(K^\sharp, K^{+\sharp})$ est un corps perfectoïde et $K^{+\sharp}$ est un anneau de valuation de K^\sharp (lemme 2.2.6). On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} |\mathrm{Spa}(K^\sharp, K^{+\sharp})| & \xrightarrow{\tau} & |\mathrm{Spa}(K(y), K^+(y))| \\ \downarrow & & \downarrow \\ |X| & \xrightarrow{\tau} & |X^b| \end{array}$$

Comme

$$\tau : |\mathrm{Spa}(K^\sharp, K^{+\sharp})| \xrightarrow{\sim} |\mathrm{Spa}(K(y), K^+(y))|$$

est un homéomorphisme (proposition 2.2.20) et que y correspond à l'unique point fermé de $\mathrm{Spa}(K(y), K^+(y))$ (proposition 1.4.21), on en déduit qu'il existe $x \in X$ tel que $\tau(x) = y$. On en déduit de plus (théorème 2.2.15) qu'il existe un unique isomorphisme de (A, A^+) -algèbres

$$(K(x), K^+(y)) \xrightarrow{\sim} (K^\sharp, K^{+\sharp})$$

induisant l'identité sur $(K^b, K^{+b}) = (K(y), K^+(y))$ après basculement. Cela finit de montrer (iv).

— Soit $\omega^b \in A^{+b}$ une pseudo-uniformisante de A^b et posons $\omega := (\omega^b)^\sharp \in A^+$. On suppose que $p \in \omega^p A^+$. Montrons que tout ouvert rationnel de X est image réciproque par τ d'un ouvert rationnel de X^b . Soit U un ouvert rationnel de X , qu'on peut supposer de la forme

$$X \left(\frac{f_1, \dots, f_n}{g} \right)$$

avec $f_1, \dots, f_n, g \in A^+$ (quitte à multiplier par une puissance adéquate de ω), (f_1, \dots, f_n) engendrant A et $f_n = \omega^N$ pour $N \geq 1$ (par le lemme 1.3.14). On a donc

$$X \left(\frac{f_1, \dots, f_n}{g} \right) = \bigcap_{1 \leq i \leq n} X \left(\frac{f_i, \omega^N}{g} \right).$$

La proposition 2.2.22 appliquée avec $f = f_i$, $c = N$ et $\varepsilon = 1/2$ fournit $a_i \in A^b$ tel que pour tout $x \in X$

$$\left| (f_i - a_i^\sharp)(x) \right| \leq |\omega(x)|^{1/2} \max(|f_i(x)|, |\omega(x)|^N) < \max(|f_i(x)|, |\omega(x)|^N),$$

d'où

$$\max(|f_i(x)|, |\omega^N(x)|) = \max(|a_i^\sharp(x)|, |\omega^N(x)|).$$

En appliquant la même proposition avec $f = g$, $c = N$ et $\varepsilon = 1/2$ on obtient $b \in A^b$ tel que pour tout $x \in X$ on ait

$$\left| (g - b^\sharp)(x) \right| \leq |\omega(x)|^{1/2} \max(|g(x)|, |\omega(x)|^N) < \max(|g(x)|, |\omega(x)|^N).$$

On en déduit que

$$X \left(\frac{f_i, \omega^N}{g} \right) = X \left(\frac{a_i^\sharp, \omega^N}{b^\sharp} \right) = \tau^{-1} \left(X^b \left(\frac{a, (\omega^b)^N}{b} \right) \right)$$

et donc

$$X \left(\frac{f_1, \dots, f_n}{g} \right) = \tau^{-1} \left(X^b \left(\frac{a_1, \dots, a_n}{b} \right) \right).$$

- Montrons que τ est injectif. Soit $x \neq y \in X$. Comme X est spectral, c'est un espace T_0 (remarque A.1.4) donc il existe un ouvert rationnel U de X tel que $x \in U$ et $y \notin U$ (quitte à échanger x et y). Par ce qui précède, il existe un ouvert rationnel V de X^b tel que $U = \tau^{-1}(V)$. On a alors $\tau(y) \notin V$ donc $\tau(x) \neq \tau(y)$.
- Ainsi τ est une bijection continue entre X et X^b et tout ouvert rationnel de X est l'image réciproque par τ d'un ouvert rationnel de X^b . C'est donc un homéomorphisme entre X et X^b , ce qui montre (ii).
- On renvoie à [28, Proposition 6.10] pour la démonstration de (v). L'idée est de se ramener à la caractéristique p par basculement et de remarquer que le complexe de Čech $\check{C}^\bullet(X, \mathcal{O}_X^+, \mathcal{U})$ (pour un recouvrement rationnel \mathcal{U} de X) est exact après localisation par ω , par (i). Ainsi pour tout $k \geq 1$ il existe par le théorème 1.4.8 un entier $N \geq 1$ tel que

$$\omega^N \check{H}^k(X, \mathcal{O}_X^+, \mathcal{U}) = 0.$$

Comme on suppose que A est de caractéristique p donc parfait, le Frobenius induit un isomorphisme sur la cohomologie donc

$$\omega^{N/p^m} \check{H}^k(X, \mathcal{O}_X^+, \mathcal{U}) = 0$$

pour tout $m \geq 0$. Ainsi $\check{H}^k(X, \mathcal{O}_X^+, \mathcal{U})$ est presque nul pour tout recouvrement \mathcal{U} de X ; cela permet d'en déduire que $\check{H}^k(X, \mathcal{O}_X^+) = 0$ est presque nul pour tout $k > 0$. □

Définition 2.4.2. Soit X un espace adique.

- (i) On dit que X est un *espace perfectoïde affinoïde* s'il existe une paire de Huber perfectoïde (A, A^+) telle que X est isomorphe à $\mathrm{Spa}(A, A^+)$.

- (ii) On dit que X est un *espace perfectoïde* s'il existe un recouvrement par des ouverts $(U_i)_{i \in I}$ de X tel que pour tout $i \in I$, l'espace adique induit sur U_i soit isomorphe à un espace perfectoïde affinoïde.
- (iii) On note Perfd la sous-catégorie pleine de EspAd dont les objets sont les espaces perfectoïdes et $\text{Perf} \subseteq \text{Perfd}$ celle dont les objets sont les espaces perfectoïdes sur $\text{Spa}(\mathbb{F}_p)$.

Remarque 2.4.3. On notera qu'un espace perfectoïde est un espace adique analytique.

Définition 2.4.4. Soient X et X^b des espaces perfectoïdes. On dit que X^b est un *basculé* de X si pour toute paire perfectoïde (A, A^+) , il existe une bijection

$$\text{Hom}_{\text{EspAd}}(\text{Spa}(A^b, A^{+b}), X^b) = \text{Hom}_{\text{EspAd}}(\text{Spa}(A, A^+), X),$$

fonctorielle en (A, A^+) .

Corollaire 2.4.5. Soit X un espace perfectoïde.

- (i) Il existe un basculé X^b de X , qui est unique à unique isomorphisme près. C'est un espace perfectoïde sur $\text{Spa}(\mathbb{F}_p)$.
- (ii) On a un foncteur de basculement

$$\text{Perfd} \rightarrow \text{Perf}, \quad Y \mapsto Y^b$$

induisant une équivalence entre la catégorie des espaces perfectoïdes sur X et celle des espaces perfectoïdes sur X^b .

- (iii) Il existe un homéomorphisme

$$\tau_X : |X| \xrightarrow{\sim} |X^b|$$

fonctoriel en X et donné par $x \mapsto x^b$ lorsque X est un espace perfectoïde affinoïde.

- (iv) L'espace perfectoïde X est affinoïde si et seulement X^b est un espace perfectoïde affinoïde.
- (v) Pour tout ouvert affinoïde U de X et $U^b := \tau_X(U)$, la paire $(\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U))$ est perfectoïde et l'unique morphisme de $(\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U))$ -algèbres

$$(\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U))^b \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_{X^b}(U^b), \mathcal{O}_{X^b}^+(U^b))$$

est un isomorphisme de paires de Huber.

Démonstration. Étant donné un recouvrement de X par des espaces perfectoïdes affinoïdes, on procède par recollement en utilisant la construction 2.2.2, le théorème 2.2.15 et le théorème 2.4.1. L'unicité du basculé vient du lemme de Yoneda. \square

Proposition 2.4.6. Soit X un espace perfectoïde et Y, Z deux espaces perfectoïdes sur X . Alors le produit fibré $Y \times_X Z$ existe dans la catégorie des espaces perfectoïdes et son basculé est $Y^b \times_{X^b} Z^b$.

Démonstration. Il suffit de traiter le cas affinoïde. On pose donc $X = \text{Spa}(A, A^+)$, $Y = \text{Spa}(B, B^+)$ et $Z = \text{Spa}(C, C^+)$ avec (A, A^+) une paire perfectoïde et $(B, B^+), (C, C^+)$ des (A, A^+) -algèbres perfectoïdes. Par la remarque 1.2.41, on sait que le produit fibré

$$Y \times_X Z = \text{Spa}(B \hat{\otimes}_A C, (B \hat{\otimes}_A C)^+)$$

existe dans la catégorie des espaces adiques. Il reste alors à montrer que $(B \hat{\otimes}_A C, (B \hat{\otimes}_A C)^+)$ est une paire perfectoïde. On renvoie à [19, Theorem 2.4.1] ou [28, Proposition 6.18]. \square

Le théorème fondamental sur les espaces perfectoïdes est la comparaison entre la cohomologie étale d'un espace perfectoïde et celle de son basculé. Pour cela, il faut introduire la notion d'*algèbre presque finie étale* (voir [28, Définition 4.13], [12, Définition 3.1.1], ou [23, Définition V.3.1.6]). Pour les corps perfectoïdes, on a le théorème suivant.

Théorème 2.4.7. Soit K un corps perfectoïde de basculé K^b .

- (i) Si L/K est une extension finie de K alors L est un corps perfectoïde et \mathcal{O}_L est une \mathcal{O}_K -algèbre presque finie étale.
- (ii) Le foncteur de basculement $L \rightarrow L^b$ induit une équivalence de catégories préservant le degré entre les extensions finies de K et les extensions finies de K^b .
- (iii) En particulier, les groupes de Galois absolus de K et de K^b sont naturellement isomorphes comme groupes topologiques.

Démonstration. Voir [28, Theorem], [23, Corollary V.3.6.3] ou [24, Theorem 4.5]. □

Définition 2.4.8. Soit (A, A^+) une paire perfectoïde. Une (A, A^+) -algèbre *finie étale* est une (A, A^+) -algèbre de Huber (B, B^+) tel que le morphisme $A \rightarrow B$ soit fini étale et que B^+ soit égal à la clôture intégrale de A^+ dans B .

Le théorème 2.4.7 s'étend au cas d'une paire perfectoïde quelconque. La démonstration utilise plusieurs théorèmes délicats ; on renvoie à [30, Theorem 7.4.5] pour une présentation courte des idées en jeu.

Théorème 2.4.9. Soit (A, A^+) un anneau perfectoïde de basculé (A^b, A^{+b}) .

- (i) Soit (B, B^+) une (A, A^+) -algèbre finie étale. Alors (B, B^+) est une paire perfectoïde et B^+ est une A^+ -algèbre presque finie étale.
- (ii) Le foncteur de basculement $(B, B^+) \rightarrow (B^b, B^{+b})$ induit une équivalence de catégories entre les (A, A^+) -algèbres finies étales et les (A^b, A^{+b}) -algèbres finies étales.

Démonstration. Voir [28, Theorem 7.9 et Proposition 7.10], [23, Theorem V.3.1.3] ou [24, Theorem 7.1]. □

On peut maintenant géométriser ces théorèmes. Il faut d'abord définir les morphismes étales entre espaces perfectoïdes.

Définition 2.4.10. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme entre espaces perfectoïdes.

- (i) On dit que f est un morphisme *fini étale* si pour tout ouvert affinoïde

$$U = \text{Spa}(A, A^+) \subseteq Y$$

de Y , l'ouvert $f^{-1}(U) \subseteq X$ est un ouvert affinoïde $\text{Spa}(B, B^+)$ de X , pour (B, B^+) une (A, A^+) -algèbre finie étale.

- (ii) On dit que f est un morphisme *étale* si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert $U \subseteq X$ de x et un ouvert $V \subseteq Y$ vérifiant $f(U) \subseteq V$ et tels qu'on ait une factorisation

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\iota} & W \\ & \searrow f|_U & \swarrow \varphi \\ & & V \end{array}$$

avec W un espace perfectoïde, ι une immersion ouverte et φ un morphisme fini étale.

La notion de morphisme (fini) étale se comporte bien par composition, changement de base et basculement. Cela permet de définir le *site étale* d'un espace perfectoïde X : un *recouvrement* de X est une famille de morphismes étales $\{f_i : Y_i \rightarrow X\}_{i \in I}$ telle que

$$\bigcup_{i \in I} f_i(Y_i) = X.$$

Le théorème 2.4.8 se géométrise alors de la façon suivante.

Théorème 2.4.11. Soit X un espace perfectoïde.

- (i) Il existe un isomorphisme naturel entre le site étale de X et le site étale de X^b .
- (ii) Si X est affinoïde alors le groupe de cohomologie étale $H_{\text{ét}}^k(X, \mathcal{O}_X^+)$ est presque nul pour tout $k > 0$.

Démonstration. Voir [28, Theorem 7.12 et Proposition 7.13]. □

Annexe A

Notions complémentaires

A.1 Topologie

Définition A.1.1. Soit X un espace topologique et $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de X . On dit que la famille $(U_i)_{i \in I}$ est une *base d'ouverts* de X si elle est stable par intersections finies et si tout ouvert de X est égal à une réunion (quelconque) d'ouverts de $(U_i)_{i \in I}$.

Définition A.1.2. Soit X un espace topologique. On dit que X est *spectral* s'il est quasi-compact, possède une base d'ouverts quasi-compacts et si tout ensemble fermé irréductible est l'adhérence d'un unique point de ce fermé ; un tel point dense est appelé un *point générique*.

Exemple A.1.3. Le spectre premier $\text{Spec } A$ d'un anneau (commutatif) A est un espace spectral. Une base d'ouverts vérifiant la définition est formée des $D(f) := \{x \in \text{Spec } A, f(x) \neq 0\}$ pour $f \in A$. Hochster a montré dans [15] que tout espace spectral est homéomorphe au spectre premier d'un anneau commutatif.

Remarque A.1.4. Un espace spectral X est T_0 , autrement dit pour tous $x, y \in X$ avec $x \neq y$, il existe un ouvert U de X contenant x mais pas y , ou contenant y mais pas x . En effet, les ensembles fermés irréductibles $\overline{\{x\}}$ et $\overline{\{y\}}$ sont distincts par unicité de leur point générique donc on a $\overline{\{x\}} \not\subseteq \overline{\{y\}}$ ou $\overline{\{y\}} \not\subseteq \overline{\{x\}}$. On a donc $x \notin \overline{\{y\}}$ ou $y \notin \overline{\{x\}}$ ce qui permet de conclure en passant au complémentaire.

Définition A.1.5. Soit X un espace spectral. Si $x, y \in X$ sont tels que y est dans l'adhérence $\overline{\{x\}}$ de x , on dit que y est une *spécialisation* de x et que x est une *générisation* de y . On dit de plus que la spécialisation (resp. générisation) est *stricte* si $x \neq y$.

Lemme A.1.6. Soit X un espace spectral. Alors la relation de spécialisation est une relation d'ordre.

A.2 Groupes et anneaux topologiques

Définition A.2.1. Un *groupe topologique (abélien)* est un groupe abélien G (noté additivement) muni d'une topologie telle que l'addition et le passage à l'opposé

$$G \times G \rightarrow G, (x, y) \mapsto x + y \quad ; \quad G \rightarrow G, x \mapsto -x$$

soient continues.

Définition A.2.2. Un anneau topologique est un anneau (commutatif) A muni d'une topologie telle que l'addition, le passage à l'opposé et la multiplication

$$A \times A \rightarrow A, (x, y) \mapsto x + y \quad ; \quad A \rightarrow A, x \mapsto -x \quad ; \quad A \times A \rightarrow A, (x, y) \mapsto xy$$

soient continues.

Lemme A.2.3. Soit G un groupe topologique et \mathcal{B} une base d'ouverts de 0 . Alors une base d'ouverts de $g \in G$ est donnée par les $g + U$ pour $U \in \mathcal{B}$.

Démonstration. Pour tout $g \in G$, la translation $x \mapsto x + g$ est un homéomorphisme. \square

Définition A.2.4. Soit G un groupe abélien.

- (i) Une suite décroissante $(G_n)_{n \geq 0}$ de sous-groupes de G est appelée une *filtration* de G .
- (ii) Soit $(G_n)_{n \geq 0}$ une filtration de G . Alors il existe une unique topologie sur G tels que les $(G_n)_{n \geq 0}$ forment une base d'ouverts de 0 et faisant de G un groupe topologique. On dit que c'est la topologie de G *définie* par la filtration $(G_n)_{n \geq 0}$.

Remarque A.2.5. On ne travaillera dans ce document qu'avec des bases dénombrables de voisinages. On pourrait généraliser la définition précédente.

Lemme A.2.6. Soit A un anneau. On suppose que A est un groupe topologique défini par une filtration $(U_n)_{n \geq 0}$. Alors A est un anneau topologique si et seulement pour tout $a \in A$ et tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a \cdot U_k \subseteq U_n$ et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $U_k \cdot U_k \subseteq U_n$.

Démonstration. ([6, Chapitre III, §6.3]) On a pour tout $a, b, a_0, b_0 \in A$

$$ab - a_0b_0 = (a - a_0)(b - b_0) + (a - a_0)b_0 + a_0(b - b_0)$$

donc l'application $A \times A \rightarrow A, (x, y) \mapsto xy$ est continue si et seulement si pour tout $a \in A$, l'application $A \rightarrow A, x \mapsto ax$ est continue en 0 et si $A \times A \rightarrow A, (x, y) \mapsto xy$ est continue en $(0, 0)$. \square

Définition A.2.7. Soient A un anneau et I un idéal de A . On définit une structure d'anneau topologique sur A par la filtration $(I^n)_{n \geq 0}$. On dit que A est muni de la *topologie I -adique*. Une base d'ouverts de $a \in A$ est donc la famille décroissante $(a + I^n)_{n \geq 0}$.

Remarque A.2.8. L'idéal de définition n'est pas unique en général. Deux idéaux I et J définissent la même topologie si et seulement si il existe des entiers $m, n \geq 1$ tels que $I^m \subseteq J$ et $J^n \subseteq I$.

Lemme A.2.9. Soient A un anneau et A_0 un sous-anneau de A muni de la topologie I_0 -adique, pour I_0 un idéal de A_0 . On munit A de la topologie définie par la filtration $(I_0^k)_{k \geq 0}$ (définition A.2.4), faisant de A un groupe topologique. Alors A est un anneau topologique si et seulement si

$$A = \bigcup_{n \geq 0} \{a \in A, I_0^n \cdot a \subseteq A_0\}.$$

Lorsque I_0 est un idéal de type fini, cela fait donc de A un anneau de Huber (définition 1.2.7) avec (A_0, I_0) comme couple de définition.

Lemme A.2.10. Soit G un groupe topologique. Alors G est séparé si et seulement l'intersection des voisinages de 0 est égale à $\{0\}$.

A.3 Complétion

Construction A.3.1. Soit G un groupe topologique dont la topologie est induite par une base d'ouverts décroissante $(G_n)_{n \geq 0}$ de 0 .

- (i) Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de G . On dit que $(x_n)_{n \geq 0}$ est une *suite de Cauchy* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_k - x_r \in G_n$ pour tout $k, r \geq n_0$.
- (ii) Deux suites de Cauchy (x_n) et (y_n) sont dites *équivalentes* si leur différence tend vers 0 dans G .
- (iii) L'ensemble des suites de Cauchy de G à équivalence près est appelé la *complétion* ou le *complété* de G , noté \hat{G} .
- (iv) La complétion \hat{G} de G est un groupe abélien pour l'addition terme à terme des suites de Cauchy. On a un morphisme de groupes $\varphi_G : G \rightarrow \hat{G}$, (appelé *canonique*), associant à un élément x de G la suite constante égale à x .
- (v) Définissons la topologie de \hat{G} . Pour tout $n \geq 0$, notons \hat{G}_n les suites de Cauchy (à équivalence près) dont tous les termes appartiennent à G_n à partir d'un certain rang. La famille décroissante $(\hat{G}_n)_{n \geq 0}$ est décrété comme étant une base d'ouverts de $0 \in \hat{G}$. La topologie engendré sur \hat{G} fait de ce dernier un groupe topologique séparé. Le morphisme canonique $\varphi_G : G \rightarrow \hat{G}$ est continu et l'image de G par ce morphisme est dense dans \hat{G} .
- (vi) Le noyau de φ_G est l'intersection des voisinages de 0 . En particulier, si G est séparé alors φ_G est injectif.
- (vii) On dit que G est *complet* si φ_G est un isomorphisme. On notera que cela inclut la séparation. Par ailleurs, \hat{G} est complet.

Remarque A.3.2. Nous nous sommes restreint à un groupe abélien ayant une base dénombrable de voisinages. On peut traiter le cas général en travaillant avec des *filtres de Cauchy*. Un traitement général de la complétion des groupes topologiques se trouve dans [6, §III.3], [13, §8.2] ou [27, §9.2] pour les anneaux et modules topologiques.

Remarque A.3.3. La construction du complété de G est fonctorielle en G . Le couple (\hat{G}, φ_G) vérifie une propriété universelle le caractérisant à unique isomorphisme près.

Construction A.3.4. Soit G un groupe topologique défini par une filtration $(G_n)_{n \geq 1}$. Le complété \hat{G} de G est isomorphe comme groupe topologique à la limite projective

$$\hat{G} := \varprojlim_{n \geq 1} G/G_n$$

muni de sa topologie canonique. Une base d'ouverts de 0 est donc donnée par les noyaux des projections canoniques

$$\hat{G}_n := \ker(\hat{G} \rightarrow G/G_n).$$

Les \hat{G}_n sont des sous-groupes de \hat{G} et $\varphi_G : G \rightarrow \hat{G}$ induit pour tout $n \geq 1$ un isomorphisme de groupes (topologiques discrets)

$$G/G_n \xrightarrow{\sim} \hat{G}/\hat{G}_n$$

Remarque A.3.5. Les constructions A.3.1 et A.3.4 s'étendent avec toutes leurs propriétés à un anneau topologique A muni d'une base dénombrable décroissante de voisinages ouverts de 0 . La multiplication est définie par le produit terme à terme des suites de Cauchy. Le complété est alors un anneau topologique complet séparé \hat{A} . On dit que A est *complet* si $\varphi_A : A \rightarrow \hat{A}$ est un isomorphisme.

Construction A.3.6. Soit A un anneau muni de la topologie I -adique, pour un idéal I de type fini de A . Le complété \hat{A} de A est isomorphe comme anneau topologique à la *complétion I -adique* de A , c'est-à-dire à la limite projective

$$\hat{A} := \varprojlim_{n \geq 1} A/I^n$$

muni de sa topologie canonique; une base d'ouverts de 0 est alors donnée par la famille décroissante $(I^n \hat{A})_{n \geq 0}$. L'anneau \hat{A} est donc muni de la topologie \hat{I} -adique pour $\hat{I} = I\hat{A}$, pour laquelle il est complet et séparé.

Définition A.3.7. Un morphisme de groupes continu $\varphi : G \rightarrow H$ entre groupes topologiques est dit *strict* si la topologie quotient sur l'image $\varphi(G) \simeq G/\ker(\varphi)$ coïncide avec la topologie induite par H .

Proposition A.3.8. Soient G, G' et G'' des groupes topologiques ayant tous une base dénombrable de voisinages ouverts de 0 . Soit

$$G \xrightarrow{f} G' \xrightarrow{g} G''$$

une suite exacte avec f et g des morphismes stricts. Alors la suite induite par complétion

$$\hat{G} \xrightarrow{\hat{f}} \hat{G}' \xrightarrow{\hat{g}} \hat{G}''$$

est exacte et les morphismes \hat{f} et \hat{g} sont stricts.

Démonstration. Voir [4, Chapitre III, §2.12, Lemme 2]. □

Le lemme suivant repose sur le lemme de Nakayama et sur l'exactitude dans ce cas de la complétion.

Lemme A.3.9. Soient A un anneau, I un idéal de A et $\varphi : M \rightarrow N$ un morphisme de A -modules.

- (i) Si le morphisme $M/IM \rightarrow N/IM$ induit par φ est surjectif alors le morphisme induit par la complétion pour la topologie I -adique

$$\varphi : \hat{M} \rightarrow \hat{N}$$

est surjectif.

- (ii) Si

$$0 \rightarrow K \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$$

est une suite exacte de A -module avec K est un A -module plat alors la suite induite par la complétion I -adique

$$0 \rightarrow \hat{K} \rightarrow \hat{M} \rightarrow \hat{N} \rightarrow 0$$

est exacte.

Démonstration. Voir [33, Tag 0315]. □

Proposition A.3.10. Soit A un anneau topologique et M un A -module topologique ayant une base dénombrable de voisinage ouverts de 0 formée de sous- A -modules. Soit $N \subseteq M$ un sous- A -module. Alors

(i) La suite

$$0 \rightarrow \hat{N} \rightarrow \hat{M} \rightarrow \hat{M}/\hat{N} \rightarrow 0$$

est exacte ;

(ii) \hat{N} est l'adhérence de l'image de $N \rightarrow \hat{M}$;

(iii) $\hat{M} \rightarrow \hat{M}/\hat{N}$ est une application ouverte.

Démonstration. Voir [33, Tag 0AS0]. □

Lemme A.3.11. Le foncteur d'oubli $\text{AnnTop} \rightarrow \text{Ann}$ a un adjoint à gauche $A \mapsto A_{\text{disc}}$ (resp. un adjoint à droite $A \mapsto A_{\text{gr}}$) munissant un anneau A de la topologie discrète (resp. de la topologie grossière).

Démonstration. Soit A un anneau et B un anneau topologique. Il est clair qu'on a des bijections fonctorielles

$$\text{Hom}_{\text{AnnTop}}(A_{\text{disc}}, B) = \text{Hom}_{\text{Ann}}(A, B) \quad \text{et} \quad \text{Hom}_{\text{AnnTop}}(B, A_{\text{gr}}) = \text{Hom}_{\text{Ann}}(B, A).$$

□

Lemme A.3.12. (i) La catégorie AnnTop des anneaux topologiques (avec morphismes d'anneaux continus) est *complète*, c'est-à-dire qu'elle a toutes les limites.

(ii) La catégorie CAnnTop des anneaux topologiques complets (avec morphismes d'anneaux continus) est complète.

Démonstration. (i) Soit I une petite catégorie et $F : I \rightarrow \text{AnnTop}$ un foncteur. La limite de $F : I \rightarrow \text{AnnTop} \xrightarrow{\text{oubli}} \text{Ann}$ est

$$L = \left\{ (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} F(A_i), \forall u : i \rightarrow j, x_j = F(u)(x_i) \right\}$$

vu comme sous-anneau de $\prod_{i \in I} F(A_i)$. La limite de $F : I \rightarrow \text{AnnTop} \xrightarrow{\text{oubli}} \text{Top}$ est L vu comme sous-espace de $\prod_{i \in I} F(A_i)$ muni de la topologie produit. On vérifie que $\prod_{i \in I} F(A_i)$ est un anneau topologique, faisant de L un (sous-)anneau topologique, limite de F dans AnnTop .

(ii) Considérons les mêmes notations que ci-dessus, en supposant cette fois que F est à valeurs dans CAnnTop . On vérifie que $\prod_{i \in I} F(A_i)$ est un anneau topologique complet séparé et que L est fermé dans ce dernier. Cela fait de L un anneau topologique complet séparé, limite de F .

□

A.4 Vecteurs de Witt

Les vecteurs de Witt permettent de relever de façon fonctorielle des anneaux parfaits de caractéristique p vers la caractéristique 0. On les utilise pour construire un quasi-inverse au foncteur de basculement d'anneaux perfectoides (voir théorème 2.2.15). On pourra consulter [31, II.6] et [26].

Définition A.4.1. Soit A un anneau de caractéristique p . On dit que A est *parfait* si l'endomorphisme de Frobenius $x \mapsto x^p$ est un automorphisme d'anneaux de A .

Proposition A.4.2. ([31, II.6, Proposition 8]) Soit A un anneau complet pour une topologie I -adique, avec I un idéal de A . On suppose que $k := A/I$ est un anneau parfait de caractéristique p . Alors il existe un unique système de représentants $[\cdot] : k \rightarrow A$ multiplicatif, i.e. vérifiant $[xy] = [x][y]$ pour tous $x, y \in k$. De plus, si A est de caractéristique p , alors ce système de représentant est additif, i.e. $[x + y] = [x] + [y]$ pour tous $x, y \in k$.

Démonstration. Donnons l'idée de la construction. Soit $x \in k$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A$ un relevé de $x^{1/p^n} \in k$. Montrons que la suite $(x_n^{p^n})_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $x_{n+1}^p = x_n \pmod{I}$, d'où $x_{n+1}^{p^2} = x_n^p \pmod{I^2}$ par la formule du binôme et car $p \in I$, puis $x_{n+1}^{p^{n+1}} = x_n^{p^n} \pmod{I^{n+1}}$ par récurrence. La suite considérée est donc de Cauchy donc converge dans A par complétude. On note $[x]$ sa limite, qui ne dépend pas du choix des relevés. On obtient un système de représentants commutant à la puissance p -ième; on vérifie qu'il est le seul avec cette propriété en remarquant que les $[x]$ pour $x \in k$ sont les seuls éléments de A étant des racines p^n -ièmes pour tout $n \geq 1$. Le reste s'ensuit sans difficultés. \square

Définition A.4.3. Un p -anneau strict est un anneau topologique A muni de la topologie p -adique pour laquelle il est complet, et tel que p n'est pas un diviseur de 0 et que A/pA est un anneau parfait.

Théorème A.4.4. Soit k un anneau parfait de caractéristique p .

- (i) Il existe un p -anneau strict $W(k)$ tel que $W(k)/p = k$. Si A est un autre p -anneau strict tel que $A/p = k$, il existe une unique isomorphisme d'anneaux topologiques $W(k) \xrightarrow{\sim} A$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} W(k) & \xrightarrow{\quad} & A \\ & \searrow & \swarrow \\ & k & \end{array}$$

où les flèches verticales sont les réductions modulo p .

- (ii) Tout élément $x \in W(k)$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} [x_n] p^n$$

avec $x_n \in k$.

- (iii) Soient k' un anneau parfait de caractéristique p et $f : k \rightarrow k'$ un morphisme d'anneaux. Il existe un unique morphisme d'anneaux topologiques $F : W(k) \rightarrow W(k')$ faisant commuter les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} W(k) & \xrightarrow{F} & W(k') \\ \downarrow & & \downarrow \\ k & \xrightarrow{f} & k' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} W(k) & \xrightarrow{F} & W(k') \\ \uparrow [\cdot] & & \uparrow [\cdot] \\ k & \xrightarrow{f} & k' \end{array}$$

où les flèches verticales de du diagramme de gauche sont les réductions modulo p . La flèche F est donnée par

$$F \left(\sum_{n=0}^{\infty} [x_n] p^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} [f(x_n)] p^n.$$

- (iv) Ainsi, le foncteur $k \rightarrow W(k)$ induit une équivalence de catégories entre les anneaux parfaits de caractéristique p et les p -anneaux stricts.

Exemple A.4.5. (i) Par unicité de l'anneau résiduel, on a $W(\mathbb{F}_p) = \mathbb{Z}_p$.

- (ii) Plus généralement, si $q = p^n$ pour $n \geq 1$ un entier alors $W(\mathbb{F}_q)$ est l'anneau des entiers de l'unique extension non ramifiée de degré n de \mathbb{Q}_p . Les représentants multiplicatifs de \mathbb{F}_q sont alors 0 et les racines $(q - 1)$ -ièmes de l'unité (ces dernières existant par le lemme de Hensel).

- (iii) Si $\overline{\mathbb{F}_p}$ est une clôture algébrique de \mathbb{F}_p alors $W(\overline{\mathbb{F}_p})$ est la *complétion* de l'anneau des entiers de l'extension non ramifiée maximale de \mathbb{Q}_p .

On peut donner une construction explicite de $W(k)$.

Définition A.4.6. Pour tout entier $n \geq 0$, on définit le n -ième *polynôme de Witt*

$$W_n := \sum_{k=0}^n p^k X_k^{p^{n-k}} \in \mathbb{Z}[X_m, m \in \mathbb{N}].$$

Proposition A.4.7. (i) Pour tout $\Phi \in \mathbb{Z}[X, Y]$, il existe une unique suite $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $\mathbb{Z}[X_i, Y_j, i, j \in \mathbb{N}]$ telle qu'on ait pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$W_n(\varphi_0, \varphi_1, \dots) = \Phi(W_n(X_0, X_1, \dots), W_n(Y_0, Y_1, \dots)).$$

- (ii) En particulier, en appliquant ce résultat aux polynômes $X + Y$ et XY , on obtient des suites de polynômes $(S_n)_{n \geq 0}$ et $(P_n)_{n \geq 0}$ telles qu'on ait, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$W_n(S_0, S_1, \dots) = W_n(X_0, X_1, \dots) + W_n(Y_0, Y_1, \dots)$$

et

$$W_n(P_0, P_1, \dots) = W_n(X_0, X_1, \dots) \cdot W_n(Y_0, Y_1, \dots).$$

Exemple A.4.8. On a

$$S_0((X_n)_{n \geq 0}, (Y_n)_{n \geq 0}) = X_0 + Y_0; \quad S_1((X_n)_{n \geq 0}, (Y_n)_{n \geq 0}) = X_1 + Y_1 + \frac{X_0^p + Y_0^p - (X_0 + Y_0)^p}{p};$$

$$P_0((X_n)_{n \geq 0}, (Y_n)_{n \geq 0}) = X_0 Y_0; \quad P_1((X_n)_{n \geq 0}, (Y_n)_{n \geq 0}) = Y_0^p X_1 + Y_1 X_0^p + p X_1 Y_1.$$

Définition A.4.9. Soit A un anneau.

(i) On considère l'ensemble $A^{\mathbb{N}}$ munit des lois, pour $a, b \in A^{\mathbb{N}}$,

$$a + b := (S_0(a, b), S_1(a, b), \dots)$$

et

$$a \cdot b := (P_0(a, b), P_1(a, b), \dots).$$

On obtient un anneau (commutatif) noté $W(A)$ ou W_A , et appelé *l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans A* . C'est un anneau topologique complet pour la topologie induite par $A^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie produit, où A est muni de la topologie discrète.

(ii) Le *relèvement de Teichmüller* est l'application

$$[\cdot] : A \rightarrow W(A), \quad a \mapsto [a] := (a, 0, 0, \dots).$$

C'est une application multiplicative.

(iii) On note W_* le morphisme d'anneaux, appelé *l'application fantôme*

$$W_* : W(A) \rightarrow A^{\mathbb{N}}, \quad a \mapsto (W_0(a), W_1(a), \dots).$$

Pour tout $n \geq 0$, le morphisme d'anneaux $W_n : W(A) \rightarrow A$ est appelé la *n -ième composante fantôme*.

Théorème A.4.10. Soit k un anneau parfait de caractéristique p . Alors W_k est un p -anneau strict tel que $W_k/p = k$. Un isomorphisme d'anneaux topologiques $W_k \xrightarrow{\simeq} W(k)$ entre les anneaux de la définition A.4.9 et du théorème A.4.4 est donné par

$$W_k \xrightarrow{\simeq} W(k), \quad (a_n)_{n=0}^{+\infty} \mapsto \sum_{n \geq 0} [a_n]^{p^{-n}} p^n,$$

d'inverse

$$W(k) \xrightarrow{\simeq} W_k, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} [b_n] p^n \mapsto (b_n^{p^n})_{n \geq 0}.$$

Remarque A.4.11. L'isomorphisme du théorème A.4.10 permet donc de voir un élément de l'anneau des vecteurs de Witt à la fois comme une suite de coefficients ou comme une série convergente de la variable p . Ce point de vue sera utilisé librement dans la section 2.2.2, consacrée au débasculément d'anneaux perfectoides de caractéristique p .

A.5 Cohomologie de Čech

On suit [3, §8.1.3]. Soient X un espace topologique, \mathcal{F} un préfaisceau de groupes abéliens sur X et $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de X par des ouverts. Pour tout entier $k \geq 0$ et tout $(i_0, \dots, i_k) \in I^{k+1}$ on note

$$U_{i_0, \dots, i_k} := U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}$$

et

$$\check{C}^k(X, \mathcal{F}, \mathcal{U}) := \prod_{(i_0, \dots, i_k) \in I^{k+1}} \mathcal{F}(U_{i_0, \dots, i_k}).$$

Si $s \in \check{C}^k(X, \mathcal{F}, \mathcal{U})$ on note $s_{i_0, \dots, i_k} \in \mathcal{F}(U_{i_0, \dots, i_k})$ l'élément associé à l'indice (i_0, \dots, i_k) . On définit une application

$$d_k : \check{C}^k(X, \mathcal{F}, \mathcal{U}) \rightarrow \check{C}^{k+1}(X, \mathcal{F}, \mathcal{U})$$

par

$$d_k(s)_{i_0, \dots, i_{k+1}} := \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j s_{i_0, \dots, i_{j-1}, i_{j+1}, \dots, i_{k+1}}$$

pour tout $s \in \check{C}^k(X, \mathcal{F}, \mathcal{U})$ et tout $(i_0, \dots, i_{k+1}) \in I^{k+2}$, les éléments de la somme étant considérés comme restreints à $U_{i_0, \dots, i_{k+1}}$. C'est un morphisme de groupes et on a $d_{k+1} \circ d_k = 0$ pour tout $k \geq 0$, faisant de $(\check{C}^\bullet(X, \mathcal{F}, \mathcal{U}), d)$ un complexe, appelé le *complexe de Čech* associé à \mathcal{F} et au recouvrement \mathcal{U} de X . Les groupes de cohomologie associés sont notés $\check{H}^\bullet(X, \mathcal{F}, \mathcal{U})$ et appelés les *groupes de cohomologie de Čech* (associés à \mathcal{F} et au recouvrement \mathcal{U}).

Pour tout $k \geq 0$ on note aussi $\check{C}_a^k(X, \mathcal{F}, \mathcal{U})$ l'ensemble des $f \in \check{C}^k(X, \mathcal{F}, \mathcal{U})$ tels que, pour tout $(i_0, \dots, i_k) \in I^{k+1}$ on ait

$$f_{\sigma(i_0), \dots, \sigma(i_k)} = \varepsilon(\sigma) f_{i_0, \dots, i_k}$$

pour toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_{k+1}$ de signature $\varepsilon(\sigma)$, et vérifiant aussi

$$f_{i_0, \dots, i_k} = 0$$

dès que les indices i_0, \dots, i_k ne sont pas deux à deux distincts. Le complexe de Čech se restreint en un complexe $(\check{C}_a^\bullet(X, \mathcal{F}, \mathcal{U}), d)$ appelé le *complexe de Čech alterné* (relatif à \mathcal{F} et \mathcal{U}). On note $\check{H}_a^\bullet(X, \mathcal{F}, \mathcal{U})$ les groupes de cohomologie correspondants. Nous omettrons d'adapter par la suite les définitions au cas alterné.

Lemme A.5.1. L'inclusion

$$(\check{C}_a^\bullet(X, \mathcal{F}, \mathcal{U}), d) \rightarrow (\check{C}^\bullet(X, \mathcal{F}, \mathcal{U}), d)$$

induit pour tout $k \geq 0$ un isomorphisme

$$\check{H}_a^k(X, \mathcal{F}, \mathcal{U}) \xrightarrow{\sim} \check{H}^k(X, \mathcal{F}, \mathcal{U}).$$

Démonstration. Voir [3, §8.1.3/1]. □

Corollaire A.5.2. Si \mathcal{U} est un recouvrement fini à n éléments, alors pour tout $k \geq n$ on a

$$\check{H}^k(X, \mathcal{F}, \mathcal{U}) = \check{H}_a^k(X, \mathcal{F}, \mathcal{U}) = 0.$$

Définition A.5.3. Soient $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}, \mathcal{V} = (V_j)_{j \in J}$ deux recouvrements de X . On dit que \mathcal{V} raffine \mathcal{U} (ou que \mathcal{V} est *plus fin* que \mathcal{U}) si pour tout $j \in J$, il existe $\alpha(j) \in I$ tel que $V_j \subseteq U_{\alpha(j)}$. Une telle application $\alpha : J \rightarrow I$ induit un morphisme de complexes

$$\left(\check{C}^\bullet(X, \mathcal{F}, \mathcal{U}), d \right) \rightarrow \left(\check{C}^\bullet(X, \mathcal{F}, \mathcal{V}), d \right).$$

Lemme A.5.4. Soient $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}, \mathcal{V} = (V_j)_{j \in J}$ deux recouvrements de X , avec \mathcal{V} raffinant \mathcal{U} . Soient $\alpha, \beta : J \rightarrow I$ tels que

$$V_j \subseteq U_{\alpha(j)} \cap U_{\beta(j)}$$

pour tout $j \in J$. Alors pour tout $k \geq 0$, les applications α et β induisent le même morphisme

$$\left(\check{H}^\bullet(X, \mathcal{F}, \mathcal{U}), d \right) \rightarrow \left(\check{H}^\bullet(X, \mathcal{F}, \mathcal{V}), d \right)$$

au niveau de la cohomologie. En particulier, si \mathcal{U} et \mathcal{V} se raffinent mutuellement, l'application ci-dessus est un isomorphisme.

Définition A.5.5. Soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de X . On considère le *morphisme d'augmentation*

$$\varepsilon : \mathcal{F}(X) \rightarrow \check{C}^0(X, \mathcal{F}, \mathcal{U}), f \mapsto (f|_{U_i})_{i \in I}.$$

Ce morphisme s'insère dans le complexe de Čech

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\varepsilon} \check{C}^0(X, \mathcal{F}, \mathcal{U}) \xrightarrow{d_0} \check{C}^1(X, \mathcal{F}, \mathcal{U}) \xrightarrow{d_1} \dots$$

pour donner un complexe appelé le *complexe de Čech augmenté*. On dit que \mathcal{U} est *\mathcal{F} -acyclique* si ce complexe est exact, c'est-à-dire si ε induit un isomorphisme

$$\mathcal{F}(X) \xrightarrow{\sim} \check{H}^0(X, \mathcal{F}, \mathcal{U})$$

et si on a

$$\check{H}^k(X, \mathcal{F}, \mathcal{U}) = 0$$

pour tout $k > 0$.

Lemme A.5.6. \mathcal{F} est un faisceau si et seulement pour tout ouvert U de X et tout recouvrement $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ de U par des ouverts, l'application induite par ε

$$\mathcal{F}(U) \rightarrow \check{H}^0(U, \mathcal{F}, \mathcal{U}), s \mapsto (s|_{U_i})_{i \in I}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. On a

$$\check{H}^0(U, \mathcal{F}, \mathcal{U}) = \left\{ (s_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i), \forall i, j \in I (s_i)_{i,j} = (s_j)_{i,j} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j) \right\}$$

donc le lemme n'est qu'une reformulation de la condition de faisceau. □

Remarque A.5.7. Par [14, Chapitre 0, (3.2.2)], il suffit de vérifier le lemme A.5.6 pour des ouverts appartenant à une base d'ouverts \mathcal{B} et de recouvrements formés uniquement d'éléments de \mathcal{B} .

Lemme A.5.8. Soit \mathcal{U} et \mathcal{V} deux recouvrements de X qui se raffinent mutuellement. Alors \mathcal{U} est \mathcal{F} -acyclique si et seulement si \mathcal{V} est \mathcal{F} -acyclique.

On fixe un autre recouvrement $\mathcal{V} = (V_j)_{j \in J}$ de X . On souhaite comparer sous certaines d'hypothèses de \mathcal{F} -acyclicité les groupes de cohomologie $(\check{H}^\bullet(X, \mathcal{F}, \mathcal{U}), d)$ et $(\check{H}^\bullet(X, \mathcal{F}, \mathcal{V}), d)$. Pour cela, on utilise un complexe double

$$(\check{C}^{\bullet, \bullet}(X, \mathcal{F}, \mathcal{U}, \mathcal{V}), d)$$

construit à partir de $(\check{C}^\bullet(X, \mathcal{F}, \mathcal{U}), d)$ et $(\check{C}^\bullet(X, \mathcal{F}, \mathcal{V}), d)$. On renvoie à [3, §8.1.4] pour les détails. Pour tous $p, q \geq 0$, $(i_0, \dots, i_p) \in I^{p+1}$ et $(j_0, \dots, j_q) \in J^{q+1}$ on note

$$\mathcal{U}_{j_0, \dots, j_q} := (U_i \cap V_{j_0, \dots, j_q})_{i \in I}$$

et

$$\mathcal{V}_{i_0, \dots, i_p} := (V_j \cap U_{i_0, \dots, i_p})_{j \in J}$$

qui sont respectivement des recouvrements de V_{j_0, \dots, j_q} et U_{i_0, \dots, i_p} . On a les résultats suivants.

Proposition A.5.9. On suppose que $\mathcal{U}_{j_0, \dots, j_q}$ et $\mathcal{V}_{i_0, \dots, i_p}$ sont \mathcal{F} -acycliques pour tous $p, q \geq 0$ et tous $(i_0, \dots, i_p) \in I^{p+1}$ et $(j_0, \dots, j_q) \in J^{q+1}$. Alors il existe un quasi-isomorphisme

$$(\check{H}^\bullet(X, \mathcal{F}, \mathcal{U}), d) \xrightarrow{\sim} (\check{H}^\bullet(X, \mathcal{F}, \mathcal{V}), d).$$

En particulier, \mathcal{U} est \mathcal{F} -acyclique si et seulement si \mathcal{V} est \mathcal{F} -acyclique.

Proposition A.5.10. On suppose que \mathcal{V} raffine \mathcal{U} et que $\mathcal{V}_{i_0, \dots, i_p}$ est \mathcal{F} -acyclique pour tous $p \geq 0$ et $(i_0, \dots, i_p) \in I^{p+1}$. Alors \mathcal{U} est \mathcal{F} -acyclique si et seulement si \mathcal{V} est \mathcal{F} -acyclique.

Proposition A.5.11. On suppose que $\mathcal{V}_{i_0, \dots, i_p}$ est \mathcal{F} -acyclique pour tous $p \geq 0$ et pour tout $(i_0, \dots, i_p) \in I^{p+1}$. Alors le recouvrement de X

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{V} := (U_i \cap V_j)_{i \in I, j \in J}$$

est \mathcal{F} -acyclique si et seulement si \mathcal{U} est \mathcal{F} -acyclique.

A.6 Localisation selon une sous-catégorie de Serre

On renvoie à [33, Tag 02MN] pour les démonstrations.

Définition A.6.1. Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne. On dit qu'une sous-catégorie pleine non-vide \mathcal{C} de \mathcal{A} est une *sous-catégorie de Serre* si pour toute suite exacte dans \mathcal{A}

$$A \rightarrow B \rightarrow C$$

avec $A, C \in \mathcal{C}$ alors $B \in \mathcal{C}$.

Lemme A.6.2. Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne et \mathcal{C} une sous-catégorie de \mathcal{A} . Alors \mathcal{C} est une sous-catégorie de Serre de \mathcal{A} si et seulement si toutes les conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) $0 \in \mathcal{C}$.

- (ii) \mathcal{C} est une sous-catégorie pleine de \mathcal{A} et si $X \in \mathcal{C}$ et $Y \in \mathcal{A}$ sont isomorphes dans \mathcal{A} alors $Y \in \mathcal{C}$.
- (iii) Tout sous-objet et tout quotient d'un objet de \mathcal{C} est un objet de \mathcal{C} .
- (iv) Pour toute suite exacte dans \mathcal{A}

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

avec $A, C \in \mathcal{C}$, on a $B \in \mathcal{C}$ (autrement dit, \mathcal{C} est *stable par extension*).

De plus, une sous-catégorie de Serre est une catégorie abélienne et le foncteur d'inclusion $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ est exact.

Définition A.6.3. Soit \mathcal{A}, \mathcal{B} des catégories abéliennes et $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur exact. Alors la sous-catégorie de \mathcal{A} formée des objets $C \in \mathcal{A}$ tels que $F(C) = 0$ est appelé le *noyau du foncteur F* et est noté $\ker(F)$.

Proposition A.6.4. Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne et \mathcal{C} une sous-catégorie de Serre de \mathcal{A} . Alors il existe une catégorie abélienne \mathcal{A}/\mathcal{C} et un foncteur exact essentiellement surjectif

$$F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{C}$$

de noyau \mathcal{C} . Le couple $(\mathcal{A}/\mathcal{C}, F)$ est caractérisé par la propriété universelle suivante : pour toute catégorie abélienne \mathcal{B} et tout foncteur exact $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ tel que $\mathcal{C} \subseteq \ker(G)$, il existe un unique foncteur exact $H : \mathcal{A}/\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ tel que $G = H \circ F$.

Bibliographie

- [1] Bhargav Bhatt, Ana Caraiani, Kiran S. Kedlaya, Jared Weinstein, and introduction by Peter Scholze. *Perfectoid Spaces Lectures from the 2017 Arizona Winter School*, volume 242 of *Mathematical surveys and monographs*. American Mathematical Society, 2019.
- [2] Siegfried Bosch. *Lectures on Formal and Rigid Geometry*, volume 2105 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer International Publishing, 2014.
- [3] Siegfried Bosch, Ulrich Güntzer, and Reinhold Remmert. *Non-Archimedean analysis. A systematic approach to rigid analytic geometry*, volume 261 of *Grundlehren Math. Wiss.* Springer, Cham, 1984.
- [4] N. Bourbaki. *Algèbre commutative Chapitres 1 à 4*. Éléments de mathématique. Springer Berlin Heidelberg, 2nd ed. 2006. édition, 2006.
- [5] N. Bourbaki. *Algèbre commutative Chapitres 5 à 7*. Éléments de mathématique. Springer Berlin Heidelberg, 1st ed. 2006. édition, 2006.
- [6] N. Bourbaki. *Topologie générale Chapitres 1 à 4*. Éléments de mathématique. Springer Berlin Heidelberg, 1st ed. 2007. édition, 2007.
- [7] Kevin Buzzard and Alain Verberkmoes. Stably uniform affinoids are sheafy. <http://arxiv.org/abs/1404.7020>, September 2015.
- [8] Brian Conrad. Number theory learning seminar 2014-2015. <http://virtualmath1.stanford.edu/~conrad/Perfseminar/>.
- [9] Laurent Fargues. Tokyo lectures on the geometry of diamonds. <https://webusers.imj-prg.fr/~laurent.fargues/smfDiamants.pdf>, 2023.
- [10] Laurent Fargues, Jean-Marc Fontaine, and préface de Pierre Colmez. Courbes et fibrés vectoriels en théorie de Hodge p -adique. *Astérisque*, 406 :1–382, 2018.
- [11] Kazuhiro Fujiwara, Ofer Gabber, and Fumiharu Kato. On Hausdorff completions of commutative rings in rigid geometry. *J. Algebra*, 332(1) :293–321, 2011.
- [12] Ofer Gabber and Lorenzo Ramero. *Almost ring theory*, volume 1800 of *Lect. Notes Math.* Springer, 2003.
- [13] Ofer Gabber and Lorenzo Ramero. Almost Rings and Perfectoid Spaces. 2022. https://pro.univ-lille.fr/fileadmin/user_upload/pages_pros/lorenzo_ramero/hodge.pdf.
- [14] Alexander Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique : I. Le langage des schémas. *Publications Mathématiques de l’IHÉS*, 4 :5–228, 1960. http://www.numdam.org/item/PMIHES_1960__4__5_0/.
- [15] M. Hochster. Prime ideal structure in commutative rings. *Trans. Am. Math. Soc.*, 142 :43–60, 1969.

- [16] Roland Huber. Continuous valuations. *Math. Z.*, 212(3) :455–477, 1993.
- [17] Roland Huber. A generalization of formal schemes and rigid analytic varieties. *Math. Z.*, 217(4) :513–551, 1994.
- [18] Roland Huber. *Étale cohomology of rigid analytic varieties and adic spaces*, volume E30 of *Aspects Math.* Vieweg, 1996.
- [19] Kiran S. Kedlaya. Sheaves, stacks, and shtukas. In *Perfectoid Spaces Lectures from the 2017 Arizona Winter School*, volume 242 of *Mathematical surveys and monographs*, pages 45–191. American Mathematical Society, 2019.
- [20] Kiran S. Kedlaya and Ruochuan Liu. Relative p -adic Hodge theory : Foundations. <http://arxiv.org/abs/1301.0792>, May 2015.
- [21] H. Matsumura. *Commutative Ring Theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1987.
- [22] Tomoki Mihara. On Tate Acyclicity and Uniformity of Berkovich Spectra and Adic Spectra. *Isr. J. Math.*, 216(1) :61–105, October 2016. <http://arxiv.org/abs/1403.7856>.
- [23] Sophie Morel. Adic spaces. http://perso.ens-lyon.fr/sophie.morel/adic_notes.pdf, 2019.
- [24] Matthew Morrow. Cours M2 spécialisé : Espaces adiques et espaces perfectoides. <https://webusers.imj-prg.fr/~matthew.morrow/Espaces/index.html>, 2018.
- [25] Matthew Morrow. The Fargues-Fontaine curve and diamonds. *Astérisque*, 414 :533–572, 2019.
- [26] Joseph Rabinoff. The Theory of Witt Vectors. <http://arxiv.org/abs/1409.7445>, September 2014.
- [27] Lorenzo Ramero. *Grimoire d’algèbre commutative*. Les Presses Insoumises, 2022. https://pro.univ-lille.fr/fileadmin/user_upload/pages_pros/lorenzo_ramero/CoursAG.pdf.
- [28] Peter Scholze. Perfectoid Spaces. *Publications Mathématiques de l’IHÉS*, 116 :245–313, 2012. http://www.numdam.org/item/PMIHES_2012__116__245_0/.
- [29] Peter Scholze. étale cohomology of diamonds. *arXiv :1709.07343*, 2017. <https://arxiv.org/abs/1709.07343>.
- [30] Peter Scholze and Jared Weinstein. *Berkeley Lectures on p -adic Geometry*, volume 207. Princeton University Press, 2020. <https://people.mpim-bonn.mpg.de/scholze/Berkeley.pdf>.
- [31] Jean-Pierre Serre. *Corps locaux*. Hermann, 1962.
- [32] J. Tate. Rigid analytic spaces. *Invent. Math.*, 12 :257–289, 1971.
- [33] The Stacks project authors. *The Stacks project*. 2022. <https://stacks.math.columbia.edu>.
- [34] Jared Weinstein. Adic spaces. In *Perfectoid Spaces Lectures from the 2017 Arizona Winter School*, volume 242 of *Mathematical surveys and monographs*, pages 14–55. American Mathematical Society, 2019. <https://math.bu.edu/people/jsweinst/AWS2017.pdf>.